

BAKİ UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

ВЕСТНИК
БАКИНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

NEWS
OF BAKU UNIVERSITY

FİZİKA-RİYAZİYYAT

elmləri seriyası

серия

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

series of

PHYSICO-MATHEMATICAL SCIENCES

№ 3, 2023

Bakı – 2023

Baş redaksiya heyəti:

Babayev E.S. (baş redaktor), **Kazımzadə A.H.** (baş redaktorun müavini), **Əliyeva İ.N.**, **Məmmədov Y.Ə.**, **Əliyev İ.Ə.**, **Paşayeva N.A.**, **Rəcəbov M.R.** (məsul katib).

Seriyanın redaksiya heyəti:

Mehdiyev M.F. (redaktorun müavini), **Paşayev B.G.** (məsul katib), **Abdullayev S.K.**, **Əhmədov Ə.M.**, **Əliyev Ə.Ə.**, **Əliyev F.Ə.**, **Məmmədov R.Q.**, **Məsimov E.Ə.**, **Orucov H.D.**, **Yaqubov M.H.**, **İsgəndərov N.Ş.**, **Mehdiyeva Q.Y.**, **Mirzəyev S.S.**, **Mirzəyev F.Ə.**, **Qasımova R.C.**, **Əbdülvahabova S.Q.**

RİYAZİYYAT

UOT 517.97

**XÜSUSİ QRADİYENT HƏDLİ XƏTTİ QEYRİ-STASİONAR
KVAZİOPTİKA TƏNLIYI ÜÇÜN LİONS FUNKSİONALLI
OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNDƏ ZƏRURİ ŞƏRT****¹N.S.İBRAHİMOV, ²Q.Y.YAQUB, ¹Ü.M.FƏRZƏLİYEVƏ****¹Lənkəran Dövlət Universiteti, Lənkəran, Azərbaycan****²Qafqaz Universiteti, Qars, Türkiyə****ulker-salayeva@mail.ru**

Bu işdə xüsusi qradiyent hədlı xətti qeyri-stasionar kvazioptika tənliyi üçün optimal idarəetmə məsələsi nəzərdən keçirilmişdir. Bu məsələdə idarəetmə rolunu adətən mühitin sındırma və udma əmsalları oynayır və keyfiyyət meyarı Lions tipli funksionaldır. Oxsar keyfiyyət meyarları adətən sərhəddə verilən Dirixle-Neyman şərtləri əsasında qurulur. Bu optimal idarəetmə məsələsində zəruri şərti əldə etmək üçün əvvəlcə məqsəd funksionalının Freşe mənasında diferensiallanan olması isbat edilir. Sonra isə xüsusi qradiyent hədlı xətti qeyri-stasionar kvazioptika tənliyi üçün optimal idarəetmə məsələsinin həlli üçün variasiya bərabərsizliyi şəklində zəruri əldə edilmişdir.

Açar sözlər: qeyri-stasionar kvazioptika tənliyi, xüsusi qradiyent hədd, optimal idarəetmə məsələsi, Lions funksionalı, zəruri şərt

1. Giriş

Qeyri-stasionar kvazioptika tənliyi üçün optimal idarəetmə məsələləri qeyri-xətti optikada bircins olmayan mühidə işıq dəstələrinin yayılması proseslərinin öyrənilməsi zamanı meydana gəlir. Bu məsələlərdə idarəetmə rolunu adətən mühitin sındırma və udma əmsalları, həmçinin şüalanan dalğaların başlanğıc fazası oynayır [1]. Qeyd etmək lazımdır ki, bircins olmayan mühidə hərəkət edən hissəciklər yüklənmiş olan zaman prosesi ifadə edən tənlik xüsusi qradiyent hədlı stasionar kvazioptika tənliyi və ya qeyri-stasionar Şredinger denklemi olur [2]. Xüsusi qradiyent həddi olmayan xətti qeyri-stasionar kvazioptika tənliyi üçün optimal idarəetmə və identifikasiya məsələləri əvvəlcə [3-7] və s. işlərində öyrənilmişdir. Bu işlərdə keyfiyyət meyarı final müşahidələrə əsasən qurulmuş və final funksionallardır.

Bu işdə xüsusi qradient həddli xətti qeyri-stasionar kvazioptika tənliyi üçün optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Bu məsələdə idarəetmə rolunu adətən mühitin sındırma və udma əmsalları oynayır və keyfiyyət meyarı Lions tipli funksionaldır. Bu tipli keyfiyyət meyarları adətən sərhəddə verilən Dirixle-Neyman şərtləri əsasında qurulur. Belə bir yaxınlaşma əvvəlcə parabolik tənlik üçün qoyulmuş tərs məsələdə başlanğıc funksiyanı tapmaq üçün J.L.Lions tərəfindən tətbiq edilmişdir [8]. Sonra isə bu yaxınlaşma riyazi fizika tənliklərinin və Şredinger tənliyinin əmsallarını tapmaq üçün A.D. İsgəndərovun işlərində geniş bir şəkildə tətbiq edilmişdir [9-11] və.s. Qeyd etmək lazımdır ki, oxşar optimal idarəetmə məsələsi xüsusi qradient hədd olmayan xətti qeyri-stasionar kvazioptika tənliyi halında [11] işində öyrənilmişdir. Göründüyü kimi bu işdə baxılan optimal idarəetmə məsələsi [3-7, 11] və s. işlərindəki optimal idarəetmə məsələlərindən fərqlidir və həm nəzəri, həm də praktik nöqteyi-nəzərdən maraq kəsb edir.

2. Optimal idarəetmə məsələsinin qoyuluşu

Aşağıdakı

$$J_{\alpha}(v) = \|\psi_1 - \psi_2\|_{L_2(\Omega)}^2 + \alpha \|v - \omega\|_H^2 \quad (2.1)$$

funksionalının

$$V \equiv \left\{ v = (v_0, v_1) : v_m \in L_2(0, l), |v_m(x)| \leq b_m, \forall x \in (0, l), m = 0, 1 \right\}$$

çoxluğunda

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \psi_p}{\partial t} + ia_0 \frac{\partial \psi_p}{\partial z} - a_1 \frac{\partial^2 \psi_p}{\partial x^2} + ia_2(x) \frac{\partial \psi_p}{\partial x} + a(x) \psi_p + v_0(x) \psi_p + iv_1(x) \psi_p = \\ = f_p(x, t, z), p = 1, 2, (x, t, z) \in \Omega, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\psi_p(x, 0, z) = \varphi_{0p}(x, z), p = 1, 2, (x, z) \in \Omega_L, \quad (2.3)$$

$$\psi_p(x, t, 0) = \varphi_{1p}(x, t), p = 1, 2, (x, t) \in \Omega_T, \quad (2.4)$$

$$\psi_1(0, t, z) = \psi_1(l, t, z) = 0, (t, z) \in Q_{TL}, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \psi_2(0, t, z)}{\partial x} = \frac{\partial \psi_2(l, t, z)}{\partial x} = 0, (t, z) \in Q_{TL}, \quad (2.6)$$

şərtləri daxilində minimallaşdırılmasından ibarət olan bir optimal idarəetmə məsələsinə baxaq.

Burada $i = \sqrt{-1}$ xəyali vahid, $T > 0, L > 0, l > 0, a_0 > 0, a_1 > 0, \alpha \geq 0,$

$b_0 > 0, b_1 > 0$ - verilmiş ədədlər; $0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T, 0 \leq z \leq L$, $\Omega_t = (0, l) \times (0, t)$, $\Omega_z = (0, l) \times (0, z)$, $\Omega_{tz} = (0, l) \times (0, t) \times (0, z)$, $\Omega = \Omega_{TL}$, $Q_{tz} = (0, t) \times (0, z)$ - dir; $a(x), a_2(x)$ isə ölçülən məhdud funksiyalar olub aşağıdakı şərtləri ödəyir:

$$\tilde{\mu}_0 \leq a(x) \leq \mu_0; \forall x \in (0, l); \mu_0, \tilde{\mu}_0 = const > 0; \quad (2.7)$$

$$|a_2(x)| \leq \mu_1, \left| \frac{da_2(x)}{dx} \right| \leq \mu_2, \forall x \in (0, l), \mu_1, \mu_2 = const > 0, a_2(0) = a_2(l) = 0; \quad (2.8)$$

$\varphi_{0p}(x, z), \varphi_{1p}(x, t), f_p(x, t, z), p = 1, 2$ isə ölçülən funksiyalar olub aşağıdakı şərtləri ödəyir:

$$\varphi_{01} \in W_2^{0, 2, 1}(\Omega_L), \varphi_{11} \in W_2^{0, 2, 1}(\Omega_T); \quad (2.9)$$

$$\varphi_{02} \in W_2^{2, 1}(\Omega_L), \frac{\partial \varphi_{02}(0, z)}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_{02}(l, z)}{\partial x} = 0, z \in (0, L); \quad (2.10)$$

$$\varphi_{12} \in W_2^{2, 1}(\Omega_T), \frac{\partial \varphi_{02}(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_{02}(l, t)}{\partial x} = 0, t \in (0, T); \quad (2.11)$$

$$f_p \in W_2^{0, 1, 1}(\Omega), p = 1, 2; \quad (2.12)$$

$\omega = (\omega_0, \omega_1) \in H \equiv L_2(0, l) \times L_2(0, l)$ - verilmiş elementdir, $\overset{0}{\nabla}$ simvolu “sanki bütün” mənasını verir.

Hər bir $v \in V$ üçün (2)-(6) şərtlərini ödəyən $\psi_p = \psi_p(x, t) \equiv \psi_p(x, t; v), p = 1, 2$ funksiyasının tapılması məsələsi başlanğıc-sərhəd məsələlər sistemidir. Aydındır ki, bu məsələ xüsusi qradiyent hədlı xətti qeyri-stasionar kvazioptika tənliyi üçün iki başlanğıc-sərhəd məsələsindən ibarətdir. Hər bir $v \in V$ üçün birinci başlanğıc-sərhəd məsələsi $\psi_1 = \psi_1(x, t) \equiv \psi_1(x, t; v)$ funksiyasının $p = 1$ olduqda (2.2)-(2.5) şərtlərindən təyin edilməsi məsələsidir, ikinci başlanğıc-sərhəd məsələsi isə $\psi_2 = \psi_2(x, t) \equiv \psi_2(x, t; v)$ funksiyasının $p = 2$ olduqda (2.2)-(2.4), (2.6) şərtlərindən təyin edilməsi məsələsidir. Xüsusi qradiyent hədlı xətti qeyri-stasionar kvazioptika tənliyi üçün başlanğıc-sərhəd məsələləri [12, 13] işlərində araşdırılmışdır. Bu işlərdə əldə edilən nəticələrdən istifadə edərək aşağıdakı teoremi ifadə edək.

Teorem 2.1. Tutaq ki, (2.7)-(2.12) şərtləri ödənilir. Onda hər bir $v \in V$ üçün (2.2)-(2.6) məsələsinin $\psi_1 \in W_2^{0, 2, 1}(\Omega), \psi_2 \in W_2^{2, 1, 1}(\Omega)$ yeganə həlli vardır və həll üçün aşağıdakı qiymətlənmələr doğrudur:

$$\|\psi_1\|_{W_2^{2,1,1}(\Omega)}^2 \leq c_1 \left(\|\varphi_{01}\|_{W_2^{0,2,1}(\Omega_L)}^2 + \|\varphi_{11}\|_{W_2^{0,2,1}(\Omega_T)}^2 + \|f_1\|_{W_2^{0,1,1}(\Omega)}^2 \right), \quad (2.13)$$

$$\|\psi_2\|_{W_2^{2,1,1}(\Omega)}^2 \leq c_2 \left(\|\varphi_{02}\|_{W_2^{2,1}(\Omega_L)}^2 + \|\varphi_{12}\|_{W_2^{2,1}(\Omega_T)}^2 + \|f_2\|_{W_2^{0,1,1}(\Omega)}^2 \right). \quad (2.14)$$

Burada $c_1 > 0, c_2 > 0$ sabitləri $\varphi_{0p}, \varphi_{1p}, f_p, p = 1, 2$ -dən asılı deyildir.

(2.1)-(2.6) optimal idarəetmə məsələsinin həllinin varlığı və yeganəliyi də [14] işində daha öncə araşdırılmışdır. Bu səbəbdən bu işdə (2.1)-(2.6) optimal idarəetmə məsələsinin həlli üçün zəruri şərti öyrənəcəyik.

3. Funksionalın diferensiallanması

Tutaq ki, $\phi_p = \phi_p(x, t, z)$, $p = 1, 2$ aşağıdakı qoşma məsələnin həllidir:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \phi_p}{\partial t} + ia_0 \frac{\partial \phi_p}{\partial z} - a_1 \frac{\partial^2 \phi_p}{\partial x^2} + i \frac{\partial}{\partial x} (a_2(x) \phi_p) + a(x) \phi_p + v_0(x) \phi_p - iv_1(x) \phi_p = \\ = 2(-1)^p (\psi_1(x, t, z) - \psi_2(x, t, z)), \quad p = 1, 2, (x, t, z) \in \Omega, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\phi_p(x, T, z) = 0, \quad p = 1, 2 \quad (x, z) \in \Omega_L, \quad (3.2)$$

$$\phi_p(x, t, L) = 0, \quad p = 1, 2, \quad (x, t) \in \Omega_T, \quad (3.3)$$

$$\phi_1(0, t, z) = \phi_1(l, t, z) = 0, \quad (t, z) \in Q, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \phi_2(0, t, z)}{\partial x} = \frac{\partial \phi_2(l, t, z)}{\partial x} = 0, \quad (t, z) \in Q. \quad (3.5)$$

Burada $\psi_p = \psi_p(x, t, z) \equiv \psi_p(x, t, z; v)$, $p = 1, 2$ funksiyası $v \in V$ olduqda (2.2)-(2.6) başlanğıc-sərhəd məsələlər sisteminin həllidir.

Qoşma məsələsinin həlli dedikdə sanki bütün $(x, t, z) \in \Omega$ üçün (3.1)-(3.5) şərtlərini ödəyən $\phi_1 \in W_2^{0,2,1}(\Omega)$, $\phi_2 \in W_2^{2,1,1}(\Omega)$ funksiyaları başa düşülür, yəni $\forall (x, t, z) \in \Omega$ üçün (3.1) tənliklərini, $\forall (x, z) \in \Omega_L, \forall (x, t) \in \Omega_T$ üçün (3.2), (3.3) başlanğıc şərtlərini, $\forall (t, z) \in Q$ üçün isə (3.4), (3.5) sərhəd şərtlərini ödəyən $\phi_1 \in W_2^{0,2,1}(\Omega)$, $\phi_2 \in W_2^{2,1,1}(\Omega)$ funksiyaları başa düşülür.

$\tau = T - t$, $\theta = L - z$ əvəzləməsinin köməyi ilə (3.1)-(3.5) qoşma məsələsini (2.2)-(2.6) məsələsinə kompleks qoşma olan başlanğıc-sərhəd məsələləri sistemə gətirmək olar. Bu halda (3.1) tənliklərinin sağ tərəfləri $W_2^{0,1,1}(\Omega)$ fəzasına aid olduğu üçün teorem 2.1-ə oxşar olaraq aşağıdakı teoremi ifadə edək.

Teorem 3.1. Tutaq ki, (2.7)-(2.12) şərtləri ödənilir. Onda (3.1)-(3.5)

qoşma məsələsinin $\phi_1 \in W_2^{0,2,1,1}(\Omega)$, $\phi_2 \in W_2^{2,1,1}(\Omega)$ yeganə həlli vardır və bu həll üçün

$$\|\phi_1\|_{W_2^{0,2,1,1}(\Omega)}^2 \leq c_3 \|\psi_1 - \psi_2\|_{W_2^{0,1,1}(\Omega)}^2, \quad (3.6)$$

$$\|\phi_2\|_{W_2^{2,1,1}(\Omega)}^2 \leq c_4 \|\psi_1 - \psi_2\|_{W_2^{0,1,1}(\Omega)}^2 \quad (3.7)$$

qiymətləndirmələri doğrudur. Burada $c_3 > 0, c_4 > 0$ sabitləri ψ_1, ψ_2 - dən asılı deyildir.

(2.1)-(2.6) optimal idarəetmə məsələsində zəruri şərti müəyyən etmək üçün əvvəlcə $J_\alpha(v)$ funksionalının V çoxluğunda Freşe mənada diferensiallanan olmasını isbat edək. Bu məqsədlə

$$\begin{aligned} & H(x, \psi_1(x, \dots), \psi_2(x, \dots), v_0(x), v_1(x), \bar{\phi}_1(x, \dots), \bar{\phi}_2(x, \dots)) = \\ & = - \int_Q \operatorname{Re}(\psi_1(x, t, z) \bar{\phi}_1(x, t, z) + \psi_2(x, t, z) \bar{\phi}_2(x, t, z)) dt dz v_0(x) + \\ & + \int_Q \operatorname{Im}(\psi_1(x, t, z) \bar{\phi}_1(x, t, z) + \psi_2(x, t, z) \bar{\phi}_2(x, t, z)) dt dz v_1(x) - \\ & - \alpha(v_0(x) - \omega_0(x))^2 - \alpha(v_1(x) - \omega_1(x))^2, \end{aligned} \quad (3.8)$$

funksiyasını daxil edək. Bu funksiyanı (2.1)-(2.6) optimal idarəetmə məsələsi üçün Hamilton-Pontryagin funksiyası adlandıracağıq. Burada $\psi_p(x, t, z) \equiv \psi_p(x, t, z; v)$, $p = 1, 2$ funksiyaları (2.2)-(2.6) məsələsinin, $\phi_p(x, t, z) \equiv \phi_p(x, t, z; v)$, $p = 1, 2$ funksiyaları isə (3.1)-(3.5) qoşma məsələsinin $v \in V$ olduqda həllidir.

Teorem 3.2. Tutaq ki, (2.7)-(2.12) şərtləri ödənilir və $\omega \in H$ verilmiş elementdir. Onda $J_\alpha(v)$ funksionalı V çoxluğunda Freşe mənada diferensiallandıdır və onun qradienti üçün aşağıdakı düstur doğrudur:

$$J'_\alpha(v) = (J'_{\alpha_0}(v), J'_{\alpha_1}(v)) = - \left(\frac{\partial H}{\partial v_0}, \frac{\partial H}{\partial v_1} \right), \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} J'_{\alpha_0}(v) & = - \frac{\partial H}{\partial v_0} = \\ & = \int_Q \operatorname{Re}(\psi_1(x, t, z) \bar{\phi}_1(x, t, z) + \psi_2(x, t, z) \bar{\phi}_2(x, t, z)) dt dz + 2\alpha(v_0(x) - \omega_0(x)), \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$J'_{\alpha 1}(v) = -\frac{\partial H}{\partial v_1} =$$

$$= -\int_Q \text{Im}(\psi_1(x,t,z)\bar{\phi}_1(x,t,z) + \psi_2(x,t,z)\bar{\phi}_2(x,t,z)) dt dz + 2\alpha(v_1(x) - \omega_1(x)). \quad (3.11)$$

Burada $H = H(x, \psi_1, \psi_2, v_0, v_1, \bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2)$ funksiyası (3.8) düsturu ilə təyin olunur.

İsbatı. Tutaq ki, $\Delta v \in B = L_\infty(0, l) \times L_\infty(0, l)$ funksiyası istənilən $v \in V$ elementinə verilən, $v + \Delta v \in V$ şərtini ödəyən artımdır və $\Delta \psi_p = \Delta \psi_p(x, t, z) \equiv \psi_p(x, t, z; v + \Delta v) - \psi_p(x, t, z; v)$, $p = 1, 2$ -dir. Burada $\psi_p(x, t, z; v)$, $p = 1, 2$ funksiyaları (2.2) -(2.6) məsələsinin $v \in V$ olduqda həllidir. (2.2)-(2.6) şərtlərindən çıxır ki, $\Delta \psi_p = \Delta \psi_p(x, t, z)$, $p = 1, 2$ funksiyaları aşağıdakı məsələnin həllidir:

$$i \frac{\partial \Delta \psi_p}{\partial t} + i a_0 \frac{\partial \Delta \psi_p}{\partial z} - a_1 \frac{\partial^2 \Delta \psi_p}{\partial x^2} + i a_2(x) \frac{\partial \Delta \psi_p}{\partial x} + a(x) \Delta \psi_p + (v_0(x) + \Delta v_0(x)) \Delta \psi_p +$$

$$+ i(v_1(x) + \Delta v_1(x)) \Delta \psi_p = -\Delta v_0(x) \psi_p - i \Delta v_1(x) \psi_p, \quad p = 1, 2, (x, t, z) \in \Omega, \quad (3.12)$$

$$\Delta \psi_p(x, 0, z) = 0, \quad p = 1, 2, (x, z) \in \Omega_L, \quad (3.13)$$

$$\Delta \psi_p(x, t, 0) = 0, \quad p = 1, 2, (x, t) \in \Omega_T, \quad (3.14)$$

$$\Delta \psi_1(0, t, z) = \Delta \psi_1(l, t, z) = 0, \quad (t, z) \in Q, \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial \Delta \psi_2(0, t, z)}{\partial x} = \frac{\partial \Delta \psi_2(l, t, z)}{\partial x} = 0, \quad (t, z) \in Q. \quad (3.16)$$

Bu məsələnin həlli üçün [14] işindəki qiymətlənməni istifadə edərək aşağıdakı qiymətlənməni əldə edirik:

$$\|\Delta \psi_p\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq c_5 \|\Delta v\|_B^2, \quad p = 1, 2. \quad (3.17)$$

Burada $c_5 > 0$ sabiti Δv -dən asılı deyildir.

İndi $J_\alpha(v)$ funksiyasının $v \in V$ elementində artımına baxaq. (2.1) düsturundan istifadə edərək $J_\alpha(v)$ funksiyasının artımını aşağıdakı kimi yazı bilərik:

$$\Delta J_\alpha(v) = J_\alpha(v + \Delta v) - J_\alpha(v) =$$

$$= 2 \int_{\Omega_L} \text{Re} \left[(\psi_1(x, t, z) - \psi_2(x, t, z)) (\Delta \bar{\psi}_1(x, t, z) - \Delta \bar{\psi}_2(x, t, z)) \right] dx dt dz +$$

$$\begin{aligned}
& + 2\alpha \int_0^l (v_0(x) - \omega_0(x)) \Delta v_0(x) dx + 2\alpha \int_0^l (v_1(x) - \omega_1(x)) \Delta v_1(x) dx + \\
& + \|\Delta \psi_1\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\Delta \psi_2\|_{L_2(\Omega)}^2 - 2 \int_{\Omega} \operatorname{Re}(\Delta \psi_1(x, t, z) \Delta \bar{\psi}_2(x, t, z)) dx dt dz + \alpha \|\Delta v\|_{H^1}^2. \quad (3.18)
\end{aligned}$$

Burada $\Delta \psi_p = \Delta \psi_p(x, t, z) \equiv \Delta \psi_p(x, t, z; v)$, $p = 1, 2$ - funksiyaları (3.12)-(3.16) məsələsinin həllidir.

İndi də (3.18) düsturunun sağ tərəfindəki birinci həddi çevirək. $\Delta \psi_1 \in W_2^{0, 2, 1, 1}(\Omega)$, $\Delta \psi_2 \in W_2^{2, 1, 1}(\Omega)$ olduğundan istənilən $\eta_p \in L_2(\Omega)$, $p = 1, 2$ funksiyaları üçün aşağıdakı inteqral eyniliklərini yazma bilərik:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left(i \frac{\partial \Delta \psi_p}{\partial t} + ia_0 \frac{\partial \Delta \psi_p}{\partial z} - a_1 \frac{\partial^2 \Delta \psi_p}{\partial x^2} + ia_2(x) \frac{\partial \Delta \psi_p}{\partial x} + a(x) \Delta \psi_p \right) \bar{\eta}_p dx dt dz + \\
& + \int_{\Omega} \left((v_0(x) + \Delta v_0(x)) \Delta \psi_p + i(v_1(x) + \Delta v_1(x)) \Delta \psi_p \right) \bar{\eta}_p dx dt dz = \\
& = - \int_{\Omega} (\Delta v_0(x) \psi_p + i \Delta v_1(x) \psi_p) \bar{\eta}_p dx dt dz, \quad p = 1, 2. \quad (3.19)
\end{aligned}$$

Bundan əlavə qoşma məsələnin həlli $\phi_1 \in W_2^{0, 2, 1, 1}(\Omega)$, $\phi_2 \in W_2^{2, 1, 1}(\Omega)$ şərtlərini ödədiyindən $\eta_{1p} \in L_2(\Omega)$, $p = 1, 2$ funksiyaları üçün aşağıdakı inteqral eyniliklərini də yazma bilərik:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left(i \frac{\partial \phi_p}{\partial t} + ia_0 \frac{\partial \phi_p}{\partial z} - a_1 \frac{\partial^2 \phi_p}{\partial x^2} + i \frac{\partial}{\partial x} (a_2(x) \phi_p) + a(x) \phi_p + v_0(x) \phi_p - iv_1(x) \phi_p \right) \bar{\eta}_{1p} dx dt dz = \\
& = 2(-1)^p \int_{\Omega} (\psi_1(x, t, z) - \psi_2(x, t, z)) \bar{\eta}_{1p} dx dt dz, \quad p = 1, 2
\end{aligned}$$

Ayındır ki, bu eyniliklərin kompleks qoşması istənilən $\eta_{1p} \in L_2(\Omega)$, $p = 1, 2$ funksiyaları üçün aşağıdakı kimi olur:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left(-i \frac{\partial \bar{\phi}_p}{\partial t} - ia_0 \frac{\partial \bar{\phi}_p}{\partial z} - a_1 \frac{\partial^2 \bar{\phi}_p}{\partial x^2} - i \frac{\partial}{\partial x} (a_2(x) \bar{\phi}_p) + a(x) \bar{\phi}_p + v_0(x) \bar{\phi}_p + iv_1(x) \bar{\phi}_p \right) \eta_{1p} dx dt dz = \\
& = 2(-1)^p \int_{\Omega} (\bar{\psi}_1(x, t, z) - \bar{\psi}_2(x, t, z)) \eta_{1p} dx dt dz, \quad p = 1, 2
\end{aligned}$$

Bu inteqral eyniliklərində $\eta_{1p} \in L_2(\Omega)$, $p = 1, 2$ funksiyalarının yerinə uy-

ğun olaraq $\Delta\psi_1 \in W_2^{0,2,1,1}(\Omega)$ və $\Delta\psi_2 \in W_2^{2,1,1}(\Omega)$ funksiyalarını götürsək, aşağıdakı bərabərlikləri alarıq:

$$\int_{\Omega} \left(-i \frac{\partial \bar{\phi}_p}{\partial t} - ia_0 \frac{\partial \bar{\phi}_p}{\partial z} - a_1 \frac{\partial^2 \bar{\phi}_p}{\partial x^2} - i \frac{\partial}{\partial x} (a_2(x) \bar{\phi}_p) + a(x) \bar{\phi}_p + v_0(x) \bar{\phi}_p + iv_1(x) \bar{\phi}_p \right) \Delta\psi_p dxdtz =$$

$$= 2(-1)^p \int_{\Omega} (\bar{\psi}_1(x,t,z) - \bar{\psi}_2(x,t,z)) \Delta\psi_p dxdtz, p=1,2$$

Bu bərabərliklərdə hissə-hissə inteqrallama düsturundan, həmçinin (2.3)-(2.6) və (3.2)-(3.5) şərtlərindən istifadə etsək, aşağıdakı bərabərlikləri əldə edirik:

$$\int_{\Omega} \left(i \frac{\partial \Delta\psi_p}{\partial t} + ia_0 \frac{\partial \Delta\psi_p}{\partial z} - a_1 \frac{\partial^2 \Delta\psi_p}{\partial x^2} + ia_2(x) \frac{\partial}{\partial x} \Delta\psi_p + a(x) \Delta\psi_p \right) \bar{\phi}_p dxdtz +$$

$$+ \int_{\Omega} (v_0(x) \Delta\psi_p + iv_1(x) \Delta\psi_p) \bar{\phi}_p dxdtz =$$

$$= 2(-1)^p \int_{\Omega} (\bar{\psi}_1(x,t,z) - \psi_2(x,t,z)) \Delta\psi dxdtz, p=1,2. \quad (3.20)$$

İndi isə (3.19) inteqral eyniliyində $\eta_p \in L_2(\Omega), p=1,2$ funksiyalarının

yerinə $\phi_1 \in W_2^{0,2,1,1}(\Omega)$ və $\phi_2 \in W_2^{2,1,1}(\Omega)$ funksiyalarını götürək. Onda

$$\int_{\Omega} \left(i \frac{\partial \Delta\psi_p}{\partial t} + ia_0 \frac{\partial \Delta\psi_p}{\partial z} - a_1 \frac{\partial^2 \Delta\psi_p}{\partial x^2} + ia_2(x) \frac{\partial \Delta\psi_p}{\partial x} + a(x) \Delta\psi_p \right) \bar{\phi}_p dxdtz +$$

$$+ \int_{\Omega} ((v_0(x) + \Delta v_0(x)) \Delta\psi_p + i(v_1(x) + \Delta v_1(x)) \Delta\psi_p) \bar{\phi}_p dxdtz =$$

$$= - \int_{\Omega} (\Delta v_0(x) \psi_p + i \Delta v_1(x) \psi_p) \bar{\phi}_p dxdtz, p=1,2$$

bərabərliklərini alarıq. Bu bərabərliklərdən (3.20) bərabərliklərini çıxaraq, aşağıdakı bərabərliklərini əldə edirik:

$$-2(-1)^p \int_{\Omega} (\bar{\psi}_1(x,t,z) - \bar{\psi}_2(x,t,z)) \Delta\psi_p dxdtz$$

$$= \int_{\Omega} (\Delta v_0(x) \psi_p + i \Delta v_1(x) \psi_p) \bar{\phi}_p dxdtz +$$

$$+ \int_{\Omega} (\Delta v_0(x) \Delta\psi_p + i \Delta v_1(x) \Delta\psi_p) \bar{\phi}_p dxdtz, p=1,2. \quad (3.21)$$

$p=1$ və $p=2$ olduqda alarıq ki,

$$2 \int_{\Omega} (\bar{\psi}_1(x,t,z) - \bar{\psi}_2(x,t,z)) \Delta\psi_1(x,t,z) dxdtz = \int_{\Omega} (\Delta v_0(x) \psi_1 + i \Delta v_1(x) \psi_1) \bar{\phi}_1 dxdtz +$$

$$+\int_{\Omega}(\Delta v_0(x)\Delta\psi_1+i\Delta v_1(x)\Delta\psi_1)\bar{\phi}_1 dxdt dz, \quad (3.22)$$

$$-2\int_{\Omega}(\bar{\psi}_1(x,t,z)-\bar{\psi}_2(x,t,z))\Delta\psi_2(x,t,z) dxdt dz = \int_{\Omega}(\Delta v_0(x)\psi_2+i\Delta v_1(x)\psi_2)\bar{\phi}_2 dxdt dz + \\ +\int_{\Omega}(\Delta v_0(x)\Delta\psi_2+i\Delta v_1(x)\Delta\psi_2)\bar{\phi}_2 dxdt dz. \quad (3.23)$$

(3.22) və (3.23) bərabərliklərini tərəf-tərəfə toplayaraq, aşağıdakı bərabərliyi alırıq:

$$2\int_{\Omega}(\bar{\psi}_1(x,t,z)-\bar{\psi}_2(x,t,z))(\Delta\psi_1(x,t,z)-\Delta\psi_2(x,t,z)) dxdt dz = \\ = \int_{\Omega}(\Delta v_0(x)(\psi_1\bar{\phi}_1+\psi_2\bar{\phi}_2)+i\Delta v_1(x)(\psi_1\bar{\phi}_1+\psi_2\bar{\phi}_2)) dxdt dz + \\ +\int_{\Omega}(\Delta v_0(x)(\Delta\psi_1\bar{\phi}_1+\Delta\psi_2\bar{\phi}_2)+i\Delta v_1(x)(\Delta\psi_1\bar{\phi}_1+\Delta\psi_2\bar{\phi}_2)) dxdt dz.$$

İndi də bu bərabərliyi onun kompleks qoşması ilə tərəf-tərəfə toplayaq. Onda aşağıdakı düsturu əldə edirik:

$$2\int_{\Omega}(\psi_1(x,t,z)-\psi_2(x,t,z))(\Delta\bar{\psi}_1(x,t,z)-\Delta\bar{\psi}_2(x,t,z)) dxdt dz = \\ = \int_{\Omega}\operatorname{Re}(\psi_1(x,t,z)\bar{\phi}_1(x,t,z)+\psi_2(x,t,z)\bar{\phi}_2(x,t,z))\Delta v_0(x) dxdt dz - \\ -\int_{\Omega}\operatorname{Im}(\psi_1(x,t,z)\bar{\phi}_1(x,t,z)+\psi_2(x,t,z)\bar{\phi}_2(x,t,z))\Delta v_1(x) dxdt dz + \\ +\int_{\Omega}\operatorname{Re}(\Delta\psi_1(x,t,z)\bar{\phi}_1(x,t,z)+\Delta\psi_2(x,t,z)\bar{\phi}_2(x,t,z))\Delta v_0(x) dxdt dz - \\ -\int_{\Omega}\operatorname{Im}(\Delta\psi_1(x,t,z)\bar{\phi}_1(x,t,z)+\Delta\psi_2(x,t,z)\bar{\phi}_2(x,t,z))\Delta v_1(x) dxdt dz. \quad (3.24)$$

Bu bərabərliyi nəzərə alaraq $J_{\alpha}(v)$ funksionalının artımını aşağıdakı şəkildə yazı bilərik:

$$\Delta J_{\alpha}(v) = J_{\alpha}(v+\Delta v) - J_{\alpha}(v) = \\ = \int_{\Omega}\operatorname{Re}(\psi_1(x,t,z)\bar{\phi}_1(x,t,z)+\psi_2(x,t,z)\bar{\phi}_2(x,t,z))\Delta v_0(x) dxdt dz - \\ -\int_{\Omega}\operatorname{Im}(\psi_1(x,t,z)\bar{\phi}_1(x,t,z)+\psi_2(x,t,z)\bar{\phi}_2(x,t,z))\Delta v_1(x) dxdt dz + \\ +2\alpha\int_0^l(v_0(x)-\omega_0(x))\Delta v_0(x)dx + 2\alpha\int_0^l(v_1(x)-\omega_1(x))\Delta v_1(x)dx + R(\Delta v). \quad (3.25)$$

Burada $R(\Delta v)$ aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$R(\Delta v) = \int_{\Omega}\operatorname{Re}(\Delta\psi_1(x,t,z)\bar{\phi}_1(x,t,z)+\Delta\psi_2(x,t,z)\bar{\phi}_2(x,t,z))\Delta v_0(x) dxdt dz -$$

$$\begin{aligned}
& -\int_{\Omega} \operatorname{Im}(\Delta \psi_1(x, t, z) \bar{\phi}_1(x, t, z) + \Delta \psi_2(x, t, z) \bar{\phi}_2(x, t, z)) \Delta v_1(x) dx dt dz + \\
& + \|\Delta \psi_1\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\Delta \psi_2\|_{L_2(\Omega)}^2 - 2 \int_{\Omega} \operatorname{Re}(\Delta \psi_1(x, t, z) \Delta \bar{\psi}_2(x, t, z)) dx dt dz + \alpha \|\Delta v\|_H^2. \quad (3.26)
\end{aligned}$$

İndi də bu qalıq həddi qiymətləndirək. (3.26) düsturundan istifadə edərək $R(\Delta v)$ üçün aşağıdakı bərabərsizliyi yazma bilərik:

$$\begin{aligned}
|R(\Delta v)| & \leq \|\Delta \psi_1\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\Delta \psi_2\|_{L_2(\Omega)}^2 + \\
& + \alpha \|\Delta v\|_H^2 + 2 \int_{\Omega} |\Delta \psi_1(x, t, z)| |\Delta \psi_2(x, t, z)| dx dt dz + \\
& + \int_{\Omega} |\Delta v_0(x)| (|\Delta \psi_1| |\phi_1| + |\Delta \psi_2| |\phi_2|) dx dt dz + \\
& + \int_{\Omega} |\Delta v_1(x)| (|\Delta \psi_1| |\phi_1| + |\Delta \psi_2| |\phi_2|) dx dt dz.
\end{aligned}$$

Bu bərabərsizliyin sağ tərəfində Koşi-Bunyakovski bərabərsizliyini tətbiq etsək, $R(\Delta v)$ üçün aşağıdakı bərabərsizliyi alarıq:

$$\begin{aligned}
|R(\Delta v)| & \leq 2 \|\Delta \psi_1\|_{L_2(\Omega)}^2 + 2 \|\Delta \psi_2\|_{L_2(\Omega)}^2 + \alpha \|\Delta v\|_H^2 + \\
& + \|\Delta v_0\|_{L_{\infty}(0, l)} \left(\|\phi_1\|_{L_2(\Omega)} \|\Delta \psi_1\|_{L_2(\Omega)} + \|\phi_2\|_{L_2(\Omega)} \|\Delta \psi_2\|_{L_2(\Omega)} \right) + \\
& + \|\Delta v_1\|_{L_{\infty}(0, l)} \left(\|\phi_1\|_{L_2(\Omega)} \|\Delta \psi_1\|_{L_2(\Omega)} + \|\phi_2\|_{L_2(\Omega)} \|\Delta \psi_2\|_{L_2(\Omega)} \right).
\end{aligned}$$

Burada (2.13), (2.14), (3.6), (3.7), (3.17) qiymətləndirmələrindən istifadə edərək $R(\Delta v)$ qalıq həddi üçün aşağıdakı qiymətləndirməni alarıq:

$$|R(\Delta v)| \leq c_6 \|\Delta v\|_B^2. \quad (3.27)$$

Burada $c_6 > 0$ sabiti Δv -dən asılı olmayan sabitdir. (3.27) qiymətləndirməsini nəzərə alsaq, $J_{\alpha}(v)$ funksionalının artımı üçün olan düsturu aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$\begin{aligned}
\Delta J_{\alpha}(v) & = \int_0^l \left[\int_{\mathcal{Q}} \operatorname{Re}(\psi_1(x, t, z) \bar{\phi}_1(x, t, z) + \psi_2(x, t, z) \bar{\phi}_2(x, t, z)) dt dz \right] \Delta v_0(x) dx + \\
& + \int_0^l [2\alpha(v_0(x) - \omega_0(x))] \Delta v_0(x) dx + \\
& + \int_0^l \left[\int_{\mathcal{Q}} -\operatorname{Im}(\psi_1(x, t, z) \bar{\phi}_1(x, t, z) + \psi_2(x, t, z) \bar{\phi}_2(x, t, z)) dt dz \right] \Delta v_1(x) dx +
\end{aligned}$$

$$+ \int_0^l [2\alpha(v_1(x) - \omega_1(x))] \Delta v_1(x) dx + o(\|\Delta v\|_B). \quad (3.28)$$

Onda Hamilton-Pontryagin funksiyanının ifadəsindən istifadə edərək alarıq:

$$\Delta J_\alpha(v) = \int_0^l \left[\left(-\frac{\partial H}{\partial v_0} \right) \Delta v_0(x) + \left(-\frac{\partial H}{\partial v_1} \right) \Delta v_1(x) \right] dx + o(\|\Delta v\|_B), \quad \forall v \in V. \quad (3.29)$$

Əgər

$$J'_{\alpha 0}(v) = -\frac{\partial H}{\partial v_0} = \\ = \int_{\Omega} \operatorname{Re}(\psi_1(x, t, z) \bar{\phi}_1(x, t, z) + \psi_2(x, t, z) \bar{\phi}_2(x, t, z)) dt dz + 2\alpha(v_0(x) - \omega_0(x)), \quad (3.30)$$

$$J'_{\alpha 1}(v) = -\frac{\partial H}{\partial v_1} = \\ = -\int_{\Omega} \operatorname{Im}(\psi_1(x, t, z) \bar{\phi}_1(x, t, z) + \psi_2(x, t, z) \bar{\phi}_2(x, t, z)) dt dz + 2\alpha(v_1(x) - \omega_1(x)), \quad (3.31)$$

kimi işarələmələr aparsaq, o zaman (3.28)-dən funksionalın Freşe mənada diferensiallanması tərifinə əsasən teoremin hökmünün doğru olduğunu alarıq. Teorem 3.2 isbat olundu.

4. Optimal idarəetmə məsələsinin həlli üçün zəruri şərt

İndi (2.1)-(2.6) optimal idarəetmə məsələsinin həlli üçün variasiya bərabərsizliyi şəklində zəruri şərti əldə edək.

Teorem 4.1. Tutaq ki, teorem 3.2-nin şərtləri ödənilir. Bundan əlavə (2.1)-(2.6) optimal idarəetmə məsələsinin həlləri çoxluğu $V_* \equiv \{v^* \in V : J_\alpha(v^*) = J_{\alpha^*} = \inf_{v \in V} J_\alpha(v)\}$ olsun. Onda ixtiyari $v^* \in V_*$ elementi

üçün aşağıdakı bərabərsizlik doğrudur:

$$\int_{\Omega} \operatorname{Re}(\psi_1^*(x, t, z) \phi_1^*(x, t, z) + \psi_2^*(x, t, z) \phi_2^*(x, t, z))(v_0(x) - v_0^*(x)) dx dt dz - \\ - \int_{\Omega} \operatorname{Im}(\psi_1^*(x, t, z) \phi_1^*(x, t, z) + \psi_2^*(x, t, z) \phi_2^*(x, t, z))(v_1(x) - v_1^*(x)) dx dt dz + \\ + 2\alpha \int_0^l (v_0^*(x) - \omega_0(x))(v_0(x) - v_0^*(x)) dx + \\ + 2\alpha \int_0^l (v_1^*(x) - \omega_1(x))(v_1(x) - v_1^*(x)) dx \geq 0, \quad \forall v \in V. \quad (4.1)$$

Burada $\psi_p^*(x, t, z) \equiv \psi_p(x, t, z; v^*)$, $\phi_p^*(x, t, z) \equiv \phi_p(x, t, z; v^*)$, $p = 1, 2$ funksiyaları uyğun olaraq (2.2)-(2.6) başlanğıc-sərhəd məsələsinin və (3.1)-(3.5) qoşma məsələsinin $v^* \in V$ üçün həlləridir.

İsbatı. Teorem 3.2-yə əsasən $J_\alpha(v)$ funksionalı V çoxluğunda Freşe mənada diferensiallandıdır və onun qradienti üçün (3.9)-(3.11) düsturları doğrudur. Bu düsturların köməyi ilə əvvəlcə V çoxluğunda $J'_\alpha(v)$ qradientinin kəsilməzliyini isbat edək. Bu məqsədlə (3.9)-(3.11) düsturlarından istifadə edib, $J'_\alpha(v)$ qradientinin V çoxluğunda artımını hesablasaq, onda istənilən $v \in V$ üçün aşağıdakı düsturları alırıq:

$$\begin{aligned} \Delta J'_{\alpha_0}(v) &= J'_{\alpha_0}(v + \Delta v) - J'_{\alpha_0}(v) = \\ &= \int_Q \operatorname{Re}(\psi_{1\Delta}(x, t, z) \Delta \bar{\phi}_1(x, t, z) + \psi_{2\Delta}(x, t, z) \Delta \bar{\phi}_2(x, t, z)) dt dz + \\ &+ \int_Q \operatorname{Re}(\Delta \psi_1(x, t, z) \bar{\phi}_1(x, t, z) + \Delta \psi_2(x, t, z) \bar{\phi}_2(x, t, z)) dt dz + 2\alpha \Delta v_0(x), \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \Delta J'_{\alpha_1}(v) &= J'_{\alpha_1}(v + \Delta v) - J'_{\alpha_1}(v) = \\ &= - \int_Q \operatorname{Im}(\psi_{1\Delta}(x, t, z) \Delta \bar{\phi}_1(x, t, z) + \psi_{2\Delta}(x, t, z) \Delta \bar{\phi}_2(x, t, z)) dt dz + \\ &- \int_Q \operatorname{Im}(\Delta \psi_1(x, t, z) \bar{\phi}_1(x, t, z) + \Delta \psi_2(x, t, z) \bar{\phi}_2(x, t, z)) dt dz + 2\alpha \Delta v_1(x). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Burada $\psi_{p\Delta}(x, t, z) \equiv \psi_p(x, t, z; v + \Delta v)$, $\psi_p(x, t, z) \equiv \psi_p(x, t, z; v)$, $\phi_p(x, t, z) \equiv \phi_p(x, t, z; v)$, $p = 1, 2$ dir.

$\Delta \phi_p = \Delta \phi_p(x, t, z) \equiv \phi_p(x, t, z; v + \Delta v) - \phi_p(x, t, z; v) = \phi_{p\Delta}(x, t, z) - \phi_p(x, t, z)$, $p = 1, 2$ funksiyaları isə aşağıdakı məsələnin həllidir:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \Delta \phi_p}{\partial t} + i a_0 \frac{\partial \Delta \phi_p}{\partial z} - a_1 \frac{\partial^2 \Delta \phi_p}{\partial x^2} + i \frac{\partial}{\partial x} (a_2(x) \Delta \phi_p) + a(x) \Delta \phi_p + (v_0(x) + \Delta v_0(x)) \Delta \phi_p - \\ - i (v_1(x) + \Delta v_1(x)) \Delta \phi_p = -\delta v_0(x) \phi_p + i \delta v_1(x) \phi_p + \\ + 2(-1)^p (\Delta \psi_1(x, t, z) - \Delta \psi_2(x, t, z)), \quad p = 1, 2, (x, t, z) \in \Omega, \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\Delta \phi_p(x, T, z) = 0, \quad p = 1, 2, (x, z) \in \Omega_L, \quad (4.5)$$

$$\Delta \phi_p(x, t, L) = 0, \quad p = 1, 2, (x, t) \in \Omega_T, \quad (4.6)$$

$$\Delta \phi_1(0, t, z) = \Delta \phi_1(l, t, z) = 0, (t, z) \in Q, \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial \Delta \phi_2(0, t, z)}{\partial x} = \frac{\partial \Delta \phi_2(l, t, z)}{\partial x} = 0, (t, z) \in Q. \quad (4.8)$$

Burada $\phi_{p\Delta} = \phi_{p\Delta}(x, t, z) \equiv \phi_p(x, t, z; v + \Delta v)$, $p = 1, 2$ $v + \Delta v \in V$ (3.1)-(3.5) qoşma məsələsinin həllidir. Əvvəlcə (4.4)-(4.8) məsələsinin həlli üçün qiymətləndirmə əldə edək. Bunun üçün (4.4) tənliklərinin hər iki tərəfini $\Delta \bar{\phi}_p(x, t, z)$, $p = 1, 2$ funksiyalarına vurub və alınan bərabərlikləri $\tilde{\Omega}_z = (0, l) \times (t, T) \times (z, L)$ oblastı üzərində inteqrallayaq. Onda aşağıdakı bərabərliyi alarıq:

$$\begin{aligned} & \int_{\tilde{\Omega}_z} \left(i \frac{\partial \Delta \phi_p}{\partial t} \Delta \bar{\phi}_p + i a_0 \frac{\partial \Delta \phi_p}{\partial z} \Delta \bar{\phi}_p - a_1 \frac{\partial^2 \Delta \phi_p}{\partial x^2} + i \frac{\partial}{\partial x} (a_2(x) \Delta \phi_p) \Delta \bar{\phi}_p + a(x) |\Delta \phi_p|^2 \right) dx d\tau d\theta + \\ & + \int_{\tilde{\Omega}_z} (v_0(x) + \Delta v_0(x)) |\Delta \phi_p|^2 dx d\tau d\theta - i \int_{\tilde{\Omega}_z} (v_1(x) + \Delta v_1(x)) |\Delta \phi_p|^2 dx d\tau d\theta = \\ & = - \int_{\tilde{\Omega}_z} (\Delta v_0(x) \phi_p \Delta \bar{\phi}_p - i \Delta v_1(x) \phi_p \Delta \bar{\phi}_p) dx d\tau d\theta + \\ & + 2(-1)^p \int_{\tilde{\Omega}_z} (\Delta \psi_1 - \Delta \psi_2) \Delta \bar{\phi}_p dx d\tau d\theta, p = 1, 2, \forall t \in [0, T], \forall z \in [0, L]. \end{aligned}$$

Bu bərabərliyin sol tərəfinə hissə-hissə inteqrallama düsturunu tətbiq edib və (4.7), (4.8) sərhəd şərtlərindən istifadə etsək, aşağıdakı bərabərlikləri alarıq:

$$\begin{aligned} & \int_{\tilde{\Omega}_z} \left(i \frac{\partial \Delta \phi_p}{\partial t} \Delta \bar{\phi}_p + i a_0 \frac{\partial \Delta \phi_p}{\partial z} \Delta \bar{\phi}_p + a_1 \left| \frac{\partial \Delta \phi_p}{\partial x} \right|^2 + i \frac{\partial}{\partial x} (a_2(x) \Delta \phi_p) \Delta \bar{\phi}_p + a(x) |\Delta \phi_p|^2 \right) dx d\tau d\theta + \\ & + \int_{\tilde{\Omega}_z} (v_0(x) + \Delta v_0(x)) |\Delta \phi_p|^2 dx d\tau d\theta - i \int_{\tilde{\Omega}_z} (v_1(x) + \Delta v_1(x)) |\Delta \phi_p|^2 dx d\tau d\theta = \\ & = - \int_{\tilde{\Omega}_z} (\Delta v_0(x) \phi_p \Delta \bar{\phi}_p - i \Delta v_1(x) \phi_p \Delta \bar{\phi}_p) dx d\tau d\theta + \\ & + 2(-1)^p \int_{\tilde{\Omega}_z} (\Delta \psi_1 - \Delta \psi_2) \Delta \bar{\phi}_p dx d\tau d\theta, p = 1, 2, \forall t \in [0, T], \forall z \in [0, L]. \quad (4.9) \end{aligned}$$

Bu bərabərliklərin kompleks qoşmasını yazsaq, aşağıdakı kimi olar:

$$\begin{aligned} & \int_{\tilde{\Omega}_z} \left(-i \frac{\partial \Delta \bar{\phi}_p}{\partial t} \Delta \phi_p - i a_0 \frac{\partial \Delta \bar{\phi}_p}{\partial z} \Delta \phi_p + a_1 \left| \frac{\partial \Delta \bar{\phi}_p}{\partial x} \right|^2 - i \frac{\partial}{\partial x} (a_2(x) \Delta \bar{\phi}_p) \Delta \phi_p + a(x) |\Delta \bar{\phi}_p|^2 \right) dx d\tau d\theta + \\ & + \int_{\tilde{\Omega}_z} (v_0(x) + \Delta v_0(x)) |\Delta \bar{\phi}_p|^2 dx d\tau d\theta + i \int_{\tilde{\Omega}_z} (v_1(x) + \Delta v_1(x)) |\Delta \bar{\phi}_p|^2 dx d\tau d\theta = \\ & = - \int_{\tilde{\Omega}_z} (\Delta v_0(x) \bar{\phi}_p \Delta \phi_p + i \Delta v_1(x) \bar{\phi}_p \Delta \phi_p) dx d\tau d\theta + \end{aligned}$$

$$+2(-1)^p \int_{\Omega_z} (\Delta \bar{\psi}_1 - \Delta \bar{\psi}_2) \Delta \phi_p dx d\tau d\theta, p = 1, 2, \forall t \in [0, T], \forall z \in [0, L].$$

Bu bərabərlikləri (4.9) bərabərliklərindən çıxsaq, aşağıdakı bərabərlikləri alarıq:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_z} i \left(\frac{\partial \Delta \phi_p}{\partial t} \Delta \bar{\phi}_p + \frac{\partial \Delta \bar{\phi}_p}{\partial t} \Delta \phi_p \right) dx d\tau d\theta + \int_{\Omega_z} i a_0 \left(\frac{\partial \Delta \phi_p}{\partial z} \Delta \bar{\phi}_p + \frac{\partial \Delta \bar{\phi}_p}{\partial z} \Delta \phi_p \right) dx d\tau d\theta + \\ & + \int_{\Omega_z} i \left(\frac{\partial}{\partial x} (a_2(x) \Delta \phi_p) \Delta \bar{\phi}_p + \frac{\partial}{\partial x} (a_2(x) \Delta \bar{\phi}_p) \Delta \phi_p \right) dx d\tau d\theta - \\ & - 2i \int_{\Omega_z} (v_1(x) + \Delta v_1(x)) |\Delta \phi_p|^2 dx d\tau d\theta = \\ & - \int_{\Omega_z} \Delta v_0(x) (\phi_p \Delta \bar{\phi}_p - \bar{\phi}_p \Delta \phi_p) dx d\tau d\theta + i \int_{\Omega_z} \Delta v_1(x) (\bar{\phi}_p \Delta \phi_p + \phi_p \Delta \bar{\phi}_p) dx d\tau d\theta + \\ & + 2(-1)^p \int_{\Omega_z} (\Delta \psi_1 - \Delta \psi_2) \Delta \bar{\phi}_p dx d\tau d\theta - 2(-1)^p \int_{\Omega_z} (\Delta \bar{\psi}_1 - \Delta \bar{\psi}_2) \Delta \phi_p dx d\tau d\theta, \\ & p = 1, 2, \forall t \in [0, T], \forall z \in [0, L]. \end{aligned}$$

Bu bərabərlikdən də asanlıqla aşağıdakı bərabərlikləri əldə edirik:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_z} \frac{\partial}{\partial t} |\Delta \phi_p|^2 dx d\tau d\theta + a_0 \int_{\Omega_z} \frac{\partial}{\partial z} |\Delta \phi_p|^2 dx d\tau d\theta + \int_{\Omega_z} \frac{\partial}{\partial x} (a_2(x) |\Delta \phi_p|^2) dx d\tau d\theta = \\ & = 2 \int_{\Omega_z} (v_1(x) + \Delta v_1(x)) |\Delta \phi_p|^2 dx d\tau d\theta - \int_{\Omega_z} \frac{da_2(x)}{dx} |\Delta \phi_p|^2 dx d\tau d\theta - \\ & - 2 \int_{\Omega_z} \Delta v_0(x) \operatorname{Im}(\phi_p \Delta \bar{\phi}_p) dx d\tau d\theta + 2 \int_{\Omega_z} \Delta v_1(x) \operatorname{Re}(\phi_p \Delta \bar{\phi}_p) dx d\tau d\theta + \\ & + 4(-1)^p \int_{\Omega_z} \operatorname{Im}[(\Delta \psi_1 - \Delta \psi_2) \Delta \bar{\phi}_p] dx d\tau d\theta, p = 1, 2, \\ & \forall t \in [0, T], \forall z \in [0, L]. \end{aligned}$$

$a_2(0) = a_2(l) = 0$ -nin şərtlərinə əsasən bu bərabərliyin sol tərəfindəki üçüncü hədd sıfıra bərabərdir. Ona görə (4.5), (4.6) şərtlərini istifadə edərək aşağıdakı bərabərlikləri alarıq:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_z} |\Delta \phi_p(x, t, \theta)|^2 dx d\theta + a_0 \int_{\Omega_i} |\Delta \phi_p(x, \tau, z)|^2 dx d\tau = \\ & = -2 \int_{\Omega_z} (v_1(x) + \Delta v_1(x)) |\Delta \phi_p|^2 dx d\tau d\theta + \int_{\Omega_z} \frac{da_2(x)}{dx} |\Delta \phi_p|^2 dx d\tau d\theta + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2 \int_{\tilde{\Omega}_z} \Delta v_0(x) \operatorname{Im}(\phi_p \Delta \bar{\phi}_p) dx d\tau d\theta - 2 \int_{\tilde{\Omega}_z} \Delta v_1(x) \operatorname{Re}(\phi_p \Delta \bar{\phi}_p) dx d\tau d\theta - \\
& -4(-1)^p \int_{\tilde{\Omega}_z} \operatorname{Im}[(\Delta \psi_1 - \Delta \psi_2) \Delta \bar{\phi}_p] dx d\tau d\theta, p=1,2, \\
& \forall t \in [0, T], \forall z \in [0, L].
\end{aligned}$$

Bu bərabərliklərdə $|v_1(x) + \Delta v_1(x)| \leq b_1, \forall x \in (0, l)$ və (2.8) şərtlərini nəzərə alsaq, aşağıdakı bərabərsizlikləri almış olarıq:

$$\begin{aligned}
& \int_{\tilde{\Omega}_z} |\Delta \phi_p(x, t, \theta)|^2 dx d\theta + a_0 \int_{\tilde{\Omega}_t} |\Delta \phi_p(x, \tau, z)|^2 dx d\tau \leq (2b_1 + \mu_2) \int_{\tilde{\Omega}_z} |\Delta \phi_p|^2 dx d\tau d\theta + \\
& + 2 \int_{\tilde{\Omega}_z} |\Delta v_0(x)| |\phi_p| |\Delta \phi_p| dx d\tau d\theta + 2 \int_{\tilde{\Omega}_z} |\Delta v_1(x)| |\phi_p| |\Delta \phi_p| dx d\tau d\theta + \\
& + 4 \int_{\tilde{\Omega}_z} (|\Delta \psi_1| + |\Delta \psi_2|) |\Delta \phi_p| dx d\tau d\theta, p=1,2, \forall t \in [0, T], \forall z \in [0, L]. \quad (4.10)
\end{aligned}$$

Bu bərabərsizliklərdə Koşi-Bunyakovski bərabərsizliyini tətbiq etsək, asanlıqla aşağıdakı bərabərsizliyi əldə edirik:

$$\begin{aligned}
& \|\Delta \phi_p(\cdot, t, \cdot)\|_{L_2(\tilde{\Omega}_z)}^2 + a_0 \|\Delta \phi_p(\cdot, \cdot, z)\|_{L_2(\tilde{\Omega}_t)}^2 \leq (2b_1 + \mu_2 + 4) \int_{\tilde{\Omega}_z} |\Delta \phi_p|^2 dx d\tau d\theta + 4 \int_{\tilde{\Omega}_z} |\Delta \psi_1|^2 dx d\tau d\theta + \\
& + 4 \int_{\tilde{\Omega}_z} |\Delta \psi_2|^2 dx d\tau d\theta + \left(\|\Delta v_0\|_{L_\infty(0, l)}^2 + \|\Delta v_1\|_{L_\infty(0, l)}^2 \right) \|\phi_p\|_{L_2(\tilde{\Omega})}^2, p=1,2, \\
& \forall t \in [0, T], \forall z \in [0, L].
\end{aligned}$$

Burada da (2.13), (2.14), (3.6), (3.7) və (3.17) qiymətləndirmələrini istifadə edərək aşağıdakı bərabərsizlikləri alarıq:

$$\begin{aligned}
& \|\Delta \phi_p(\cdot, t, \cdot)\|_{L_2(\tilde{\Omega}_z)}^2 + a_0 \|\Delta \phi_p(\cdot, \cdot, z)\|_{L_2(\tilde{\Omega}_t)}^2 \leq (2b_1 + \mu_2 + 4) \int_{\tilde{\Omega}_z} |\Delta \phi_p|^2 dx d\tau d\theta + \\
& + c_7 \left(\|\Delta v_0\|_{L_\infty(0, l)}^2 + \|\Delta v_1\|_{L_\infty(0, l)}^2 \right), p=1,2, \forall t \in [0, T], \forall z \in [0, L].
\end{aligned}$$

Bu bərabərsizliklərdən aşağıdakı iki növ bərabərsizlikləri yazma bilərik:

$$\begin{aligned}
& \|\Delta \phi_p(\cdot, t, \cdot)\|_{L_2(\tilde{\Omega}_L)}^2 \leq (2b_1 + \mu_2 + 4) \int_0^t \|\Delta \phi_p(\cdot, \tau, \cdot)\|_{L_2(\tilde{\Omega}_L)}^2 d\tau + \\
& + c_7 \left(\|\Delta v_0\|_{L_\infty(0, l)}^2 + \|\Delta v_1\|_{L_\infty(0, l)}^2 \right), p=1,2, \forall t \in [0, T], \quad (4.11) \\
& \|\Delta \phi_p(\cdot, \cdot, z)\|_{L_2(\tilde{\Omega}_T)}^2 \leq \frac{(2b_1 + \mu_2 + 4)}{a_0} \int_0^z \|\Delta \phi_p(\cdot, \cdot, \theta)\|_{L_2(\tilde{\Omega}_T)}^2 d\theta +
\end{aligned}$$

$$+ \frac{c_7}{a_0} \left(\|\Delta v_0\|_{L_\infty(0,l)}^2 + \|\Delta v_1\|_{L_\infty(0,l)}^2 \right), p=1,2, \forall z \in [0, L]. \quad (4.12)$$

Bu bərabərsizliklərə Qronuol lemmasını tətbiq etsək, aşağıdakı qiymətləndirmələri almış olarıq:

$$\|\Delta \phi_p(\cdot, t, \cdot)\|_{L_2(\Omega_L)}^2 \leq c_8 \left(\|\Delta v_0\|_{L_\infty(0,l)}^2 + \|\Delta v_1\|_{L_\infty(0,l)}^2 \right), p=1,2, \forall t \in [0, T], \quad (4.13)$$

$$\|\Delta \phi_p(\cdot, \cdot, z)\|_{L_2(\Omega_T)}^2 \leq c_9 \left(\|\Delta v_0\|_{L_\infty(0,l)}^2 + \|\Delta v_1\|_{L_\infty(0,l)}^2 \right), p=1,2, \forall z \in [0, L]. \quad (4.14)$$

$\forall t \in [0, T], \forall z \in [0, L]$ üçün bu qiymətləndirmələri tərəf-tərəfə toplasaq aşağıdakı qiymətləndirmələri əldə etmiş oluruq:

$$\|\Delta \phi_p(\cdot, t, \cdot)\|_{L_2(\Omega_L)}^2 + \|\Delta \phi_p(\cdot, \cdot, z)\|_{L_2(\Omega_T)}^2 \leq c_{10} \left(\|\Delta v_0\|_{L_\infty(0,l)}^2 + \|\Delta v_1\|_{L_\infty(0,l)}^2 \right), p=1,2. \quad (4.15)$$

Burada $c_{10} > 0$ sabitdir və $\Delta v = (\Delta v_0, \Delta v_1)$ –dən asılı deyildir. Bilavasitə bu qiymətləndirmələrdən aşağıdakı qiymətləndirmələri alarıq:

$$\|\Delta \phi_p\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq c_{11} \|\Delta v\|_B^2, p=1,2, \quad (4.16)$$

Burada $c_{11} > 0$ sabitdir və Δv –dən asılı deyildir.

(4.2) və (4.3) düsturlarının köməyi ilə aşağıdakı bərabərsizlikləri yaza bilərik:

$$\begin{aligned} |\Delta J'_{\alpha m}(v)| &\leq \int_Q (|\psi_{1\Delta}(x, t, z)| |\Delta \phi_1(x, t, z)| + |\psi_{2\Delta}(x, t, z)| |\Delta \phi_2(x, t, z)|) dt dz + \\ &+ \int_Q (|\Delta \psi_1(x, t, z)| |\phi_1(x, t, z)| + |\Delta \psi_2(x, t, z)| |\phi_2(x, t, z)|) dt dz + \\ &+ 2\alpha |\Delta v_m(x)|, m=0,1, x \in (0, l). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Bu bərabərsizliklərə Koşi-Bunyakovski bərabərsizliyini tətbiq etsək, alarıq:

$$\begin{aligned} |\Delta J'_{\alpha m}(v)| &\leq \\ &\|\psi_{1\Delta}(x, \cdot, \cdot)\|_{L_2(Q)} \|\Delta \phi_1(x, \cdot, \cdot)\|_{L_2(Q)} + \|\psi_{2\Delta}(x, \cdot, \cdot)\|_{L_2(Q)} \|\Delta \phi_2(x, \cdot, \cdot)\|_{L_2(Q)} + \\ &+ \|\Delta \psi_1(x, \cdot, \cdot)\|_{L_2(Q)} \|\phi_1(x, \cdot, \cdot)\|_{L_2(Q)} + \|\Delta \psi_2(x, \cdot, \cdot)\|_{L_2(Q)} \|\phi_2(x, \cdot, \cdot)\|_{L_2(Q)} + \\ &+ 2\alpha |\Delta v_m(x)|, m=0,1, x \in (0, l). \end{aligned}$$

Alınan bərabərsizlikləri $(0, l)$ intervalı üzrə inteqrallasaq və Koşi-Bunyakovski bərabərsizliyini tətbiq etsək

$$\begin{aligned} \|\Delta J'_{\alpha m}(v)\|_{L_1(0,l)} &\leq \|\psi_{1\Delta}\|_{L_2(\Omega)} \|\Delta \phi_1\|_{L_2(\Omega)} + \|\psi_{2\Delta}\|_{L_2(\Omega)} \|\Delta \phi_2\|_{L_2(\Omega)} + \\ &+ \|\phi_1\|_{L_2(\Omega)} \|\Delta \psi_1\|_{L_2(\Omega)} + \|\phi_2\|_{L_2(\Omega)} \|\Delta \psi_2\|_{L_2(\Omega)} + 2\alpha l \|\Delta v_m\|_{L_\infty(0,l)}, m=0,1. \end{aligned} \quad (4.18)$$

bərabərsizliklərini əldə edərək. (2.13), (2.14) qiymətləndirmələrini və onların $\Psi_{p\Delta}(x, t, z)$, $p = 1, 2$ funksiyaları üçün analoqlarını, eləcə də (3.6), (3.7), (3.17), (4.16) qiymətləndirmələrini istifadə edərək aşağıdakı bərabərsizlikləri alırıq:

$$\|\Delta J'_{\alpha m}(v)\|_{L_1(0,t)} \leq c_{19} \|\Delta v\|_B, m = 0, 1. \quad (4.19)$$

Bu bərabərsizlikdən $J'_\alpha(v)$ qradientinin komponentlərinin istənilən $v \in V$ elementində kəsilməzliyi alınır, yəni $\forall v \in V$ üçün $\|\delta v\|_B \rightarrow 0$ olduqda

$$\|J'_{\alpha m}(v + \delta v) - J'_{\alpha m}(v)\|_{L_1(0,t)} \rightarrow 0, m = 0, 1. \quad (4.20)$$

limit münasibətlərinin doğruluğunu əldə edərək. Bu limit münasibətlərindən və (2.1) funksionalının V çoxluğunda kəsilməzliyindən onun V çoxluğunda Freşe mənada kəsilməz diferensiallanan olduğunu əldə edərək. V çoxluğunun B fəzasında qabarıq çoxluq olmasından [15] işindən bildiyimiz funksional fəzalarda ekstremal məsələlərin həlli üçün zəruri şərt haqqındakı teoremin bütün şərtlərinin ödəndiyini görürük. Bu bildiyimiz teoremdən istifadə edərək və $v^* \in V$ idarəetməsinin optimal idarəetmə olduğunu nəzərə alsaq, aşağıdakı bərabərsizliyi yaza bilərik:

$$\langle J'_\alpha(v^*), v - v^* \rangle \geq 0, \quad \forall v \in V.$$

$J_\alpha(v)$ funksionalının qradienti üçün (3.10), (3.11) düsturlarını burada nəzərə alaraq, teoremin hökmünün doğru olduğunu əldə edərək. Teorem 4.1 isbat olundu.

ƏDƏBİYYAT

1. Воронцов М.А., Шмальгаузен В.И. Принципы адаптивной оптики. - Москва: Наука, - 1985. - 335 с.
2. Бутковский А.Г., Самойленко Ю.И. Управление квантовомеханическими процессами. - Москва: Наука, - 1984, - 256 с.
3. Ягубов Г.Я., Ибрагимов Н.С. Задача оптимального управления для нестационарного уравнения квазиоптики / В сб.: «Проблемы матем. и опт. управления». – Баку: - 2001, - с. 49-57.
4. Ибрагимов Н.С. О существовании решения задачи идентификации по граничному наблюдению для нестационарного уравнения квазиоптики // Вестник Ленкоранского гос. ун-та. Сер. естественных наук, 2010, - Ленкорань: - с. 27-44.
5. Ибрагимов Н.С. Задача идентификации для нестационарного уравнения квазиоптики // Таврический Вестник Информатики и Математики, - 2010, - № 2, - с. 45-55.
6. Ибрагимов Н.С. Об одной задаче идентификации по финальному наблюдению для линейного нестационарного уравнения квазиоптики / Журнал вычислительной и прикладной математики, Киевск. ун-та им. Т.Шевченко, - 2010, - № 4, - с. 26-37.
7. Yildiz B., Kilicoglu O., Yagubov G. Optimal control problem for non stationary Schrödinger equation // Numerical methods for partial differential equations, - 2009, - 25, - p. 1195-1203.

8. Лионс Ж.Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. - Москва: Мир, - 1972, - 416 с.
9. Искендеров А.Д. О вариационных постановках многомерных обратных задач математической физики // Докл. АН СССР, - 1984, - т. 274, - № 3, - с.531-533.
10. Искендеров А.Д. Махмудов Н.М. Оптимальное управление квантомеханической системой с критерием качества Лионса // Изв.АН Азерб. Сер. физ.-тех.-матем. наук, - 1995, - т. XVI, - №5-6, - с. 30-35.
11. Iskenderov A.D. Yagubov G.Ya. N.S. Ibragimov, Aksoy N.Y. Variation formulation of the inverse problem of determining the complex-coefficient of equation of quasioptics // Euroasian Journal of Mathematical and Computer Applications. Vol 2., Issue 2 (2014), - pp. 102-121.
12. Ибрагимов Н., Ягуб Г., Фарзалиева У. О начально-краевой задаче для линейного нестационарного уравнения квазиоптики со специальным градиентным слагаемым // Известия Ленкоранского гос. ун-та. Сер. естественных наук, - № 2, - 2018, - с. 212-220.
13. Ибрагимов Н., Ягуб Г., Фарзалиева У. Вторая начально-краевая задача для линейного нестационарного уравнения квазиоптики со специальным градиентным слагаемым // Известия Ленкоранского гос. ун-та. Сер.математических и естественных наук, - № 1, - 2019, - с. 82-89.
14. Farzalieva U.M. "Existence and Uniqueness of a Solution to the optimal Control Problem with Lions Type Functional for the Linear Nonstationary Quasi-Optics Equation" //Journal of Contemporary Applied Mathematics National Academy of Sciences of Azerbaijan - NAS Azerbaijan, Institute of Mathematics and Mechanics, - Baku: - 2021, - pp. 38-52
15. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. - Москва: Наука, - 1981, - 400 с.

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ФУНКЦИОНАЛОМ ЛИОНСА ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ КВАЗИОПТИКИ СО СПЕЦИАЛЬНЫМ ГРАДИЕНТНЫМ СЛАГАЕМЫМ

Н.С.ИБРАГИМОВ, Г.Я.ЯГУБ, У.М.ФАРЗАЛИЕВА

РЕЗЮМЕ

В данной работе рассматривается задача оптимального управления с интегральным критерием качества типа функционала Лионса и изучается вопрос необходимого условия для линейного нестационарного уравнения квазиоптики со специальным градиентным слагаемым. Подобные критерии качества обычно составляются на основе отображения Дирихле-Неймана на границе. Для установления необходимого условия в задаче оптимального управления сначала доказывается дифференцируемость по Фреше рассматриваемого функционала. Далее устанавливается необходимое условие в виде вариационного неравенства для решения задачи оптимального управления для линейного нестационарного уравнения квазиоптики со специальным градиентным слагаемым.

Ключевые слова: Нестационарное уравнения квазиоптики, специальное градиентное слагаемое, задача оптимального управления, функционала Лионса

**NECESSARY CONDITION IN SOLUTION TO THE OPTIMAL
CONTROL PROBLEM WITH LIONS TYPE FUNCTIONAL
FOR THE LINEAR NONSTATIONARY QUASI-OPTICS EQUATION
WITH A SPECIAL GRADIENT TERM**

N.S.İBRAGIMOV, G.Y.YAGUB, U.M.FARZALIEVA

SUMMARY

In this paper, optimal control problem for the linear nonstationary quasi-optics equation with a special gradient term is considered. The control role in this problem is usually played by the refractive and absorption coefficients of the medium, and the quality criterion is a Lions-type functional. Such quality criteria are usually formed on the basis on the Dirichlet-Neumann mapping on the boundary. To obtain the necessary condition in this optimal control problem, it is first proved that the objective functional is Frechet differentiable. Then, the linear nonstationary quasi-optics equation with a special gradient term is necessary to solve the optimal control problem in the form of a variational inequality.

Keywords: non-stationary quasi-optics equation, special gradient term, optimal control problem, Lions-type functional, necessary condition

Mathematics subject classification **60K15+44A10+68N15**

**MAPLE RİYAZİ PAKETİ MÜHİTİNDƏ QEYRİ-STASİONAR
TƏSADÜFİ FUNKSİYANIN KANONİK AYRILIŞININ
ARAŞDIRILMASI**

Q.R.QASIMOV, R.R.CƏFƏROVA

Bakı Dövlət Universiteti

gkurban@mail.ru, ceferovarefiqe451@gmail.com

İşdə arqumentin dəyişməsinin verilmiş oblastında qeyri-stasionar təsadüfi funksiyanın kanonik ayrılışının qurulmasının praktiki metodunun alqoritmi araşdırılır və bu alqoritm Maple-proqram paketində reallaşdırılır. Verilmiş korelyasiya funksiyası üçün yüksək dəqiqliyə malik hamar aproksimativ səth alınır.

Açar sözlər: təsadüfi funksiya, korelyasiya funksiyası, kanonik ayrılış, koordinat funksiyası, Maple paketi

GİRİŞ: Dinamik sistemləri təyin edən təsadüfi funksiyalar mürəkkəb riyazi obyektlər olduqlarından onların daha sadə obyektlərlə-skalyar təsadüfi kəmiyyətlər vasitəsilə kanonik ayrılışlarının alınma zərurəti yaranır. Ən ümumi şəkildə təsadüfi funksiyaların kanonik ayrılışları V.S.Puqaçev tərəfindən hazırlanmış üsulla reallaşdırıla bildi ([1]). Sonra işlənmiş kanonik ayrılış üsulları ilə informatika, rabitə, radiotexnika, avtomatika, raket dinamika və s. elmi-texniki sahələrə aid küylərdə siqnalların aşkarlanması və onların optimal işlənməsi problemlərini ümumi bir nəzəriyyə çərçivəsində birləşdirmək mümkün oldu. Daha sonra kanonik ayrılışlar kompüter dəstəkli məsələlərdə (məs., [2]), çoxölçülü Gauss vektorlarına aid məsələlərdə (məs., [5]) aparıcı rol oynamağa başladı; qeyri-xətti kanonik analiz yarandı (məs., [4]). Proqram paketlərinin təkmilləşdirilməsi isə kanonik ayrılış alqoritmlərinin daha çevik proqram realizasiyalarını mümkün etdi. Təqdim olunan işdə qeyri -stasionar funksiyanın xüsusi seçilmiş funksiyalar sistemi üzrə kanonik ayrılış alqoritmi qurulur, bu alqoritm Maple paketində ([6], [7]) reallaşdırılır, verilmiş korelyasiya funksiyasının yüksək yaxınlıq dərəcəsinə malik approksimatoru alınır.

1.Məsələnin qoyuluşu

Korelyasiya funksiyası

>kx:=unapply(D*exp(beta*(t+t1)-alpha*abs(t-t1)),t,t1,D,alpha, beta)

$$kx := (t, t1, D, \alpha, \beta) \mapsto D \cdot e^{\beta \cdot (t+t1) - \alpha \cdot |t-t1|} \quad (1)$$

şəklində verilmiş təsadüfi X(t)-funksiyasının

$$f_{2v+1}(t) = e^{-\beta t} \cos \frac{2\pi vt}{T} \quad (v = 0, 1, 2, \dots);$$

$$f_{2v}(t) = e^{-\beta t} \sin \frac{2\pi vt}{T} \quad (v = 1, 2, \dots), \quad \alpha > 0, \beta > 0, \quad 0 < t < T$$

sistemi üzrə $X(t) = E(X(t)) + \sum_v V_v x_v(t)$ (burada 1-ci hədd X(t)-nin riyazi gözləməsi, V_v – lər riyazi gözləməsi sıfır olan korelə olunmamış təsadüfi kəmiyyətlər, $x_v(t)$ -lər isə təsadüfi olmayan koordinat funksiyalardır) kano-nik ayrılışının alınmasının Maple-proqramı qurulur.

2.Alqoritmin qurulması və proqram realizasiyası

Kanonik ayrılış aşağıdakı alqoritm üzrə alınır:

1) $A_r = \int_T f_r(t)X(t)dt \quad (r = 1, 2, \dots)$ təsadüfi kəmiyyətləri daxil edilir;

2) A_r -lərin korelyasiya momentləri hesablanır:

$$K_{v\mu} = \int_T \int_T f_v(t) f_\mu(s) kx(t, s, D, \alpha, \beta) dt ds;$$

3) bu məqsədlə əvvəlcə köməkçi

$$z_r = \int_T f_r(s) kx(t, s, D, \alpha, \beta) ds \quad (r = 1, 2, \dots)$$

massivi daxil edilir və onun elementləri təyin olunur.

>z:=array(1..10):assume(t>0, t<T, s>0, s<T, abs(alpha) <>abs(beta));

>z[1]:=unapply(simplify(int(exp(-beta*s)*kx(t, s, D, alpha, beta), s=0..T)), t, T, D, alpha, beta);

$$z_1 := (t, T, D, \alpha, \beta) \mapsto \frac{D \cdot (2 \cdot e^{\beta \cdot t} - e^{(t-T) \cdot \alpha + \beta \cdot t} - e^{t \cdot (\beta - \alpha)})}{\alpha} \quad (2)$$

>for nu from 1 to 4 do z[2*nu+1]:=unapply(simplify(int(exp(-beta*s) *cos(2*Pi*nu*s/T)*kx(t, s, D, alpha, beta), s=0..T)), t, T, D, alpha, beta);

z[2*nu]:=unapply (simplify (int (exp (-beta*s) *sin(2*Pi*nu*s/T) *kx (t, s, D, alpha, beta), s=0..T)), t, T, D, alpha, beta) od:

$$k_{v\mu} = \int_T f_v(t) z_\mu(t) dt$$

düsturuna əsasən $k_{v\mu}$ -lər hesablanır:

>k:=array(1..10,1..10):

>k[1,1]:=unapply(int(z[1] (s,T,D,alpha, beta)*exp(-beta*s) , s=0..T), T, D, alpha, beta);

$$k_{1,1} := (T, D, \alpha, \beta) \mapsto \frac{2 \cdot D \cdot e^{-T \cdot \alpha} \cdot (T \cdot \alpha \cdot e^{T \cdot \alpha} - e^{T \cdot \alpha} + 1)}{\alpha^2} \quad (3)$$

$$k_{2\nu,2\mu+1}=k_{2\mu+1,2\nu}:$$

>for nu from 1 to 4 do for mu from 1 to 5 do k[2*nu,2*mu-1]:=unapply(int(z[2*nu] (s, T, D, alpha, beta)* exp(-beta*s)*cos(2*Pi*mu*s/T), s=0..T), T, D, alpha, beta) od od;

> for nu from 1 to 4 do for mu from 1 to 5 do k[2*mu-1,2*nu]:=0 od od;
 $k_{2\nu+1,2\nu+1}:$

>for nu from 1 to 4 do k[2*nu+1,2*nu+1]:= unapply(int(z[2*nu+1] (s, T, D, alpha, beta)* exp(-beta*s)*cos(2*Pi*nu*s/T), s=0..T), T, D, alpha, beta) od;

$$\begin{aligned}
 k_{3,3} &:= (T, D, \alpha, \beta) \\
 &\mapsto \frac{\alpha \cdot T^3 \cdot D \cdot e^{-T \cdot \alpha} \cdot (e^{T \cdot \alpha} \cdot T^2 \cdot \alpha^2 + 4 \cdot e^{T \cdot \alpha} \cdot \pi^2 - 2 \cdot T \cdot \alpha \cdot e^{T \cdot \alpha} + 2 \cdot T \cdot \alpha)}{(T^2 \cdot \alpha^2 + 4 \cdot \pi^2)^2} \\
 k_{5,5} &:= (T, D, \alpha, \beta) \\
 &\mapsto \frac{T^3 \cdot \alpha \cdot D \cdot e^{-T \cdot \alpha} \cdot (e^{T \cdot \alpha} \cdot T^2 \cdot \alpha^2 + 16 \cdot e^{T \cdot \alpha} \cdot \pi^2 - 2 \cdot T \cdot \alpha \cdot e^{T \cdot \alpha} + 2 \cdot T \cdot \alpha)}{(T^2 \cdot \alpha^2 + 16 \cdot \pi^2)^2} \\
 k_{7,7} &:= (T, D, \alpha, \beta) \\
 &\mapsto \frac{\alpha \cdot T^3 \cdot D \cdot e^{-T \cdot \alpha} \cdot (e^{T \cdot \alpha} \cdot T^2 \cdot \alpha^2 + 36 \cdot e^{T \cdot \alpha} \cdot \pi^2 - 2 \cdot T \cdot \alpha \cdot e^{T \cdot \alpha} + 2 \cdot T \cdot \alpha)}{(T^2 \cdot \alpha^2 + 36 \cdot \pi^2)^2} \\
 k_{9,9} &:= (T, D, \alpha, \beta) \tag{4} \\
 &\mapsto \frac{T^3 \cdot \alpha \cdot D \cdot e^{-T \cdot \alpha} \cdot (e^{T \cdot \alpha} \cdot T^2 \cdot \alpha^2 + 64 \cdot e^{T \cdot \alpha} \cdot \pi^2 - 2 \cdot T \cdot \alpha \cdot e^{T \cdot \alpha} + 2 \cdot T \cdot \alpha)}{(T^2 \cdot \alpha^2 + 64 \cdot \pi^2)^2}
 \end{aligned}$$

$$k_{2\nu,2\nu}:$$

>for nu from 1 to 4 do k[2*nu,2*nu]:=unapply(int(z[2*nu] (s, T, D, alpha, beta)* exp(-beta*s)*sin(2*Pi*mu*s/T), s=0..T) , T,D, alpha,beta) od;

$$\begin{aligned}
 k_{4,4} &:= (T, D, \alpha, \beta) \\
 &\mapsto \frac{D \cdot T^2 \cdot e^{-T \cdot \alpha} \cdot (e^{T \cdot \alpha} \cdot T^3 \cdot \alpha^3 + 16 \cdot e^{T \cdot \alpha} \cdot \pi^2 \cdot T \cdot \alpha + 32 \cdot e^{T \cdot \alpha} \cdot \pi^2 - 32 \cdot \pi^2)}{(T^2 \cdot \alpha^2 + 16 \cdot \pi^2)^2} \\
 k_{6,6} &:= (T, D, \alpha, \beta) \\
 &\mapsto \frac{D \cdot T^2 \cdot e^{-T \cdot \alpha} \cdot (e^{T \cdot \alpha} \cdot T^3 \cdot \alpha^3 + 36 \cdot e^{T \cdot \alpha} \cdot \pi^2 \cdot T \cdot \alpha + 72 \cdot e^{T \cdot \alpha} \cdot \pi^2 - 72 \cdot \pi^2)}{(T^2 \cdot \alpha^2 + 36 \cdot \pi^2)^2} \\
 k_{8,8} &:= (T, D, \alpha, \beta) \tag{5} \\
 &\mapsto \frac{D \cdot T^2 \cdot e^{-T \cdot \alpha} \cdot (e^{T \cdot \alpha} \cdot T^3 \cdot \alpha^3 + 64 \cdot e^{T \cdot \alpha} \cdot \pi^2 \cdot T \cdot \alpha + 128 \cdot e^{T \cdot \alpha} \cdot \pi^2 - 128 \cdot \pi^2)}{(T^2 \cdot \alpha^2 + 64 \cdot \pi^2)^2}
 \end{aligned}$$

$$k_{2\nu+1,2\mu+1} (\nu \neq \mu):$$

>for nu1 from 0 to 4 do for mu1 from nu1+1 to 4 do k[2*nu1+1, 2*mu1+1]:=unapply(int(z[2*nu1+1] (s, T, D, alpha, beta)* exp(-beta*s) *cos(2*Pi*mu1*s/T), s=0..T) , T,D, alpha,beta); k[2*mu1+1,2*nu1+1]:= unapply(k[2*nu1+1,2*mu1+1] (T,D, alpha,beta),T,D, alpha,beta) od od;

$$k_{2\nu,2\mu} (\nu \neq \mu):$$

>for nu2 from 1 to 4 do for mu2 from nu2+1 to 4 do k[2*nu2, 2*mu2]:=unapply(int(z[2*nu2] (s, T, D, alpha, beta)* exp(-beta*s) *sin(2*Pi*mu2*s/T), s=0..T), T, D, alpha, beta); k[2*nu2,2*mu2]:= unapply(k[2*nu2, 2*mu2] (T, D, alpha, beta), T, D, alpha, beta) od od;

4) Kanonik ayrılışın V_ν - əmsallarının (korelə olunmamış təsadüfi kəmiyyətlərin) təyin olunduğu $A_1^0=V_1$, $A_n^0=-\sum_{\nu=1}^{n-1} c_{n\nu} V_\nu + V_n$ sisteminə daxil olan $c_{\nu\mu}$ - əmsalları və V_ν - təsadüfi kəmiyyətlərinin B_ν dispersiyaları aşağıdakı rekurent cəbri tənliklər sistemindən təyin olunurlar:

$$c_{\nu 1} = -\frac{k_{1\nu}}{B_1} \quad (\nu = 1, 2, \dots);$$

$$c_{\nu\mu} = -\frac{1}{B_\nu} (k_{\mu\nu} - \sum_{\lambda=1}^{\nu-1} c_{\mu\lambda} B_\lambda c_{\nu\lambda}) \quad (\mu = 2, \dots, \nu - 1, \nu = 3, 4 \dots),$$

$$B_1 = k_{11}, \quad B_\nu = k_{\nu\nu} - \sum_{\lambda=1}^{\nu-1} c_{\nu\lambda}^2 B_\lambda \quad (\nu = 3, 4 \dots).$$

> B:=array(1..10):

>B[1]:=unapply(int(z[1,1] (s,T,D,alpha, beta), T,D,alpha, beta);

$$B_1 = (T, D, \alpha, \beta) \mapsto \frac{2 \cdot D \cdot e^{-T \cdot \alpha} \cdot (T \cdot \alpha \cdot e^{T \cdot \alpha} - e^{T \cdot \alpha} + 1)}{\alpha^2} \quad (6)$$

>c:=array(1..10,1..10):

>for nu from 2 to 5 do c[nu,1]:=unapply(-k[1, nu] (T, D, alpha, beta) / B[1] (T, D, alpha, beta), T, D, alpha, beta) od;

$$c_{2,1} = (T, D, \alpha, \beta) \mapsto 0$$

$$c_{3,1} = (T, D, \alpha, \beta) \mapsto \frac{T^2 \cdot (e^{T \cdot \alpha} - 1) \cdot \alpha^2}{(T^2 \cdot \alpha^2 + 4 \cdot \pi^2) \cdot (T \cdot \alpha \cdot e^{T \cdot \alpha} - e^{T \cdot \alpha} + 1)}$$

$$c_{4,1} = (T, D, \alpha, \beta) \mapsto 0$$

$$c_{5,1} = (T, D, \alpha, \beta) \mapsto \frac{T^2 \cdot (e^{T \cdot \alpha} - 1) \cdot \alpha^2}{(T^2 \cdot \alpha^2 + 16 \cdot \pi^2) \cdot (T \cdot \alpha \cdot e^{T \cdot \alpha} - e^{T \cdot \alpha} + 1)} \quad (7)$$

>B[2]:=unapply(k [2,2] (T, D, alpha, beta)- B[1](T,D, alpha,beta)* c[2,1] (T,D, alpha,beta) ^2 , T,D, alpha,beta);

$$B_2 := (T, D, \alpha, \beta) \quad (8)$$

$$\mapsto \frac{D \cdot T^2 \cdot e^{-T \cdot \alpha} \cdot (e^{T \cdot \alpha} \cdot T^3 \cdot \alpha^3 + 4 \cdot e^{T \cdot \alpha} \cdot \pi^2 \cdot T \cdot \alpha + 8 \cdot e^{T \cdot \alpha} \cdot \pi^2 - 8 \cdot \pi^2)}{(T^2 \cdot \alpha^2 + 4 \cdot \pi^2)^2}$$

>for nu from 3 to 4 do c[nu, 2]:=unapply(- (1/ B[1] (T, D, alpha, beta))*(z[2,nu] (T, D, alpha, beta)- B[1] (T,D, alpha,beta)* c[2,1] (T, D, alpha, beta)*c[nu, 1] (T, D, alpha, beta)), T, D, alpha, beta) od;

$$c_{3,2} := (T, D, \alpha, \beta) \mapsto 0$$

$$c_{4,2} := (T, D, \alpha, \beta) \mapsto - \left(16 \cdot (T^2 \cdot \alpha^2 + 4 \cdot \pi^2)^2 \cdot \pi^2 \cdot (e^{T \cdot \alpha} - 1) \right) / \left((e^{T \cdot \alpha} \cdot T^3 \cdot \alpha^3 + 4 \cdot e^{T \cdot \alpha} \cdot \pi^2 \cdot T \cdot \alpha + 8 \cdot e^{T \cdot \alpha} \cdot \pi^2 - 8 \cdot \pi^2) \cdot (T^4 \cdot \alpha^4 + 20 \cdot \pi^2 \cdot T^2 \cdot \alpha^2 + 64 \cdot \pi^4) \right) \quad (9)$$

>B[3]:=unapply(k [3,3] (T, D, alpha, beta)- B[1](T,D, alpha,beta)* c[3,1] (T,D, alpha, beta)^2-B[2] (T,D, alpha, beta)* c[3,2] (T,D, alpha, beta)^2 ,T, D, alpha, beta);

$$B_3 := (T, D, \alpha, \beta) \quad (10)$$

$$\mapsto \frac{\alpha \cdot T^3 \cdot D \cdot e^{-T \cdot \alpha} \cdot (e^{T \cdot \alpha} \cdot T^2 \cdot \alpha^2 + 4 \cdot e^{T \cdot \alpha} \cdot \pi^2 - 2 \cdot T \cdot \alpha \cdot e^{T \cdot \alpha} + 2 \cdot T \cdot \alpha)}{(T^2 \cdot \alpha^2 + 4 \cdot \pi^2)^2} - \frac{2 \cdot D \cdot e^{-T \cdot \alpha} \cdot \alpha^2 \cdot T^4 \cdot (e^{T \cdot \alpha} - 1)^2}{(T \cdot \alpha \cdot e^{T \cdot \alpha} - e^{T \cdot \alpha} + 1) \cdot (T^2 \cdot \alpha^2 + 4 \cdot \pi^2)^2} + 16 \cdot \pi^2)$$

>for nu from 4 to 5 do c[nu, 2]:=unapply(simplify(- (1/ B[1] (T, D, alpha, beta))*(z[3,nu](T, D, alpha, beta)- B[1](T,D, alpha, beta)* c[3,1] (T, D, alpha,beta) *c[nu,2] (T,D, alpha,beta))), T, D, alpha,beta) od;

$$c_{4,3} := (T, D, \alpha, \beta) \mapsto 0$$

$$c_{5,3} := (T, D, \alpha, \beta) \mapsto \left(2 \cdot (e^{T \cdot \alpha} - 1) \cdot (T^2 \cdot \alpha^2 + 4 \cdot \pi^2) \cdot T^2 \cdot \alpha^2 \right) / \left((e^{T \cdot \alpha} \cdot T^3 \cdot \alpha^3 + 4 \cdot e^{T \cdot \alpha} \cdot \pi^2 \cdot T \cdot \alpha - 3 \cdot e^{T \cdot \alpha} \cdot T^2 \cdot \alpha^2 + 3 \cdot T^2 \cdot \alpha^2 - 4 \cdot e^{T \cdot \alpha} \cdot \pi^2 + 4 \cdot \pi^2) \cdot (T^2 \cdot \alpha^2 + 4 \cdot \pi^2)^2 \right) \quad (11)$$

>B[4]:=unapply(simplify(k [4,4] (T, D, alpha, beta)- sum(B[j](T,D, alpha, beta)* c[4,j] (T, D, alpha,beta)^2,j=1..3)),T, D, alpha, beta);

$$B_4 := (T, D, \alpha, \beta) \mapsto \left(64 \cdot D \cdot T^3 \cdot \alpha \cdot \left(\left((T \cdot \alpha + 4) \cdot \pi^4 + \frac{5 \cdot T^2 \cdot \alpha^2 \cdot (T \cdot \alpha + 2) \cdot \pi^2}{16} \right. \right. \right. \quad (12)$$

$$\left. \left. \left. + \frac{\alpha^5 \cdot T^5}{64} \right) \cdot e^{T \cdot \alpha} - \frac{5 \cdot \pi^2 \cdot T^2 \cdot \alpha^2}{8} - 4 \cdot \pi^4 \right) \right) / \left((T^2 \cdot \alpha^2 + 16 \cdot \pi^2)^2 \cdot (e^{T \cdot \alpha} \cdot T^3 \cdot \alpha^3 \right.$$

$$\left. + 4 \cdot e^{T \cdot \alpha} \cdot \pi^2 \cdot T \cdot \alpha + 8 \cdot e^{T \cdot \alpha} \cdot \pi^2 - 8 \cdot \pi^2) \right)$$

5) $x_k(t)$ - ləri təyin etmək üçün aşağıdakı münasibətlər alınır:

$$x_1(t) = \frac{z_1(t)}{B_1}$$

$$x_2(t) = \frac{z_2(t)}{B_2}$$

$$x_3(t) = \frac{\left(z_3(t) - \frac{k_{31} z_1(t)}{B_1} \right)}{B_3}$$

$$x_4(t) = \frac{\left(z_2(t) - \frac{k_{42} z_2(t)}{B_2} \right)}{B_4}$$

.....

$$x_{2n+1}(t) = \frac{1}{B_{2n+1}} \left\{ \sum_{v=0}^{n-1} d_{2n+1,2n+1}(t) z_{2n+1}(t) + z_{2n+1}(t) \right\},$$

$$x_{2n}(t) = \frac{1}{B_{2n}} \left\{ \sum_{v=0}^{n-1} d_{2n,2n}(t) z_{2n}(t) + z_{2n}(t) \right\};$$

burada

$$d_{n\mu} = c_{n\mu} + \sum_{v=\mu+1}^{n-1} c_{nv} d_{v\mu} \quad , \quad d_{n,n-1} = c_{n,n-1}.$$

>x:=array(1..5):

>for n from 1 to 2 do x[n]:=unapply(z[n] (t, T, D, alpha, beta) / B[n]
(T,D, alpha, beta), t,T,D, alpha,beta) od;

$$x_1 := (t, T, D, \alpha, \beta) \mapsto \frac{\left(2 \cdot e^{\beta \cdot t} - e^{(t-T) \cdot \alpha + \beta \cdot t} - e^{t \cdot (\beta - \alpha)} \right) \cdot \alpha}{2 \cdot e^{-T \cdot \alpha} \cdot \left(T \cdot \alpha \cdot e^{T \cdot \alpha} - e^{T \cdot \alpha} + 1 \right)}$$

$$x_2 := (t, T, D, \alpha, \beta) \mapsto \left(2 \cdot \left(2 \cdot e^{\beta \cdot t} \cdot \sin\left(\frac{t \cdot \pi}{T}\right) \cdot \cos\left(\frac{t \cdot \pi}{T}\right) \cdot T \cdot \alpha - \pi \right. \right. \quad (13)$$

$$\left. \cdot e^{(t-T) \cdot \alpha + \beta \cdot t} + \pi \cdot e^{t \cdot (\beta - \alpha)} \right) \cdot \left(T^2 \cdot \alpha^2 + 4 \cdot \pi^2 \right) \right) / \left(T \cdot e^{-T \cdot \alpha} \cdot \left(e^{T \cdot \alpha} \cdot T^3 \cdot \alpha^3 \right. \right.$$

$$\left. + 4 \cdot e^{T \cdot \alpha} \cdot \pi^2 \cdot T \cdot \alpha + 8 \cdot e^{T \cdot \alpha} \cdot \pi^2 - 8 \cdot \pi^2 \right)$$

>for n from 3 to 4 do x[n]:=unapply(simplify((z[n] (t, T, D, alpha,

beta)– k[n,n – 2] (T,D, alpha,beta)* z[n – 2](t,T,D, alpha,beta)/ B[n– 2] (T,D, alpha, beta) / B[n] (T, D, alpha, beta), t, T, D, alpha, beta) od;

$$\begin{aligned}
 x_3 := (t, T, D, \alpha, \beta) \mapsto & \left(4 \cdot \left(-\frac{e^{(T-t)\alpha + \beta T} \cdot T \cdot \alpha}{4} + (e^{T\alpha + \beta T} \cdot T \cdot \alpha - \right. \right. \\
 & - e^{T\alpha + \beta T} + e^{\beta T}) \cdot \cos\left(\frac{t\pi}{T}\right)^2 + \left(-\frac{T\alpha}{2} + 1\right) \cdot e^{T\alpha + \beta T} \\
 & \left. - \frac{e^{t(\beta + \alpha)} \cdot T \cdot \alpha}{4} - e^{\beta T} \right) \cdot \left(\frac{T^2 \cdot \alpha^2}{4} + \pi^2 \right) \Bigg/ \left(\left(\left(\frac{1}{4} \cdot T^3 \cdot \alpha^3 + \pi^2 \cdot T \cdot \alpha - \frac{3}{4} \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \cdot T^2 \cdot \alpha^2 - \pi^2 \right) \cdot e^{T\alpha} + \frac{3 \cdot T^2 \cdot \alpha^2}{4} + \pi^2 \right) \cdot T \right) \\
 x_4 := (t, T, D, \alpha, \beta) \mapsto & - \left(4 \cdot \left(\frac{T^2 \cdot \alpha^2}{16} + \pi^2 \right) \cdot \left(-\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot T^2 \cdot \alpha^2 - \pi^3 \right) \right. \\
 & \left. \cdot e^{(T-t)\alpha + \beta T} - 4 \cdot \left(\left((T\alpha + 2) \cdot \pi^2 + \frac{T^3 \cdot \alpha^3}{4} \right) \cdot e^{T\alpha + \beta T} - 2 \cdot \pi^2 \cdot e^{\beta T} \right) \right. \\
 & \cdot \sin\left(\frac{t\pi}{T}\right) \cdot \cos\left(\frac{t\pi}{T}\right)^3 + 2 \cdot \left(\left((T\alpha + 4) \cdot \pi^2 + \frac{T^3 \cdot \alpha^3}{4} \right) \cdot e^{T\alpha + \beta T} - 4 \cdot \pi^2 \right. \\
 & \left. \cdot e^{\beta T} \right) \cdot \sin\left(\frac{t\pi}{T}\right) \cdot \cos\left(\frac{t\pi}{T}\right) + \pi \cdot e^{t(\beta + \alpha)} \cdot \left(\frac{T^2 \cdot \alpha^2}{4} + \pi^2 \right) \Bigg) \Bigg/ \left(T \cdot \left((T\alpha + \right. \right. \\
 & \left. \left. + 4) \cdot \pi^4 + \frac{5 \cdot T^2 \cdot \alpha^2 \cdot (T\alpha + 2) \cdot \pi^2}{16} + \frac{\alpha^5 \cdot T^5}{64} \right) \cdot e^{T\alpha} - \frac{5 \cdot \pi^2 \cdot T^2 \cdot \alpha^2}{8} - 4 \cdot \pi^4 \right)
 \end{aligned} \tag{14}$$

6)

$$H_x(t, t1) = \sum_v B_v x_v(t) x_v(t1)$$

düsturuna əsasən X - təsadüfi kəmiyyətinin verilmiş korelyasiya funksiyasının kanonik ayrılışının 4-cü xüsusi cəmi qurulur:

>with(plots):

>HN=unapply(Sum(B[n1] (t, T, D, alpha, beta) * x[n1] (t, T, D, alpha,beta)* x[n1] (t1,T,D, alpha, beta), n1=1..4), t,t1,T,D, alpha,beta);

$$\begin{aligned}
 HN := (t, t1, T, D, \alpha, \beta) \mapsto & \sum_{n1=1}^4 B_{n1}(T, D, \alpha, \beta) \cdot x_{n1}(t, T, D, \alpha, \beta) \cdot x_{n1}(t1, T, D, \\
 & \alpha, \beta)
 \end{aligned} \tag{15}$$

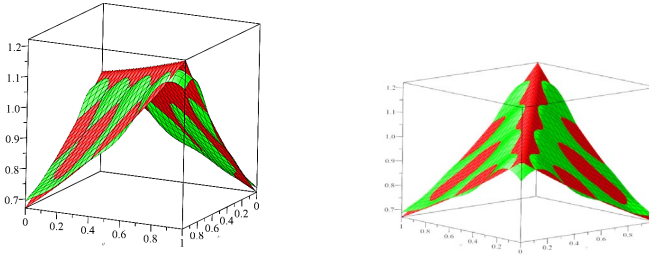
3. Qrafiklərin qurulması

Parametrlərin xüsusi qiymətləri üçün kx(t, t1) və HN(t, t1) hesablanır və uyğun 3d- səthləri qurulur:

>HNS:=unapply(subs({ T=1, D=1, alpha=0, beta=0.1}, HN(t, t1,T, D, alpha, beta)), t, t1):

```
>kxs:=unapply(subs({ D=1, alpha=0.5 , beta=0.1}, kx(t, t1, T, D, alpha, beta)), t, t1):
```

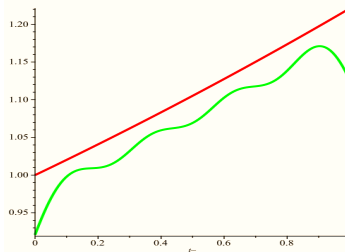
```
>plot3d ([kxs(t,t1), HNS(t,t1)], t=0..1 , t1=0..1, color=[red , green]);
```



Alınmış qrafiki mənzərə hamar approksimativ səthin (yaşıl rəngli) araşdırılan korelyasiya səthinə yüksək dərəcədə yaxınlığını əks etdirir.

Dispersiyanın nəzəri və approksimativ qrafikləri qurulur; nisbi xəta hesablanır

```
>plot3d ([kxs(t,t), HNS(t,t)], t=0..1 , thickness=3, color=[red, green]);
```



```
>DK:=int(kxs(t,t) , t=0..1);
```

$$DK := 1.107013791 \quad (16)$$

```
>with(Student[NumericalAnalysis]):
```

```
>DHN:= AdaptiveQuadrature(HNS(t,t) , t=0..1 , method=simpson, partition =4, output=value);
```

$$DHN := 1.073764380 \quad (17)$$

```
>(DK-DHN)/DK;
```

$$0.03003522745 \quad (18)$$

Nisbi xətanın 3%-ə bərabər olduğu görünür.

Nəticə: Verilmiş korelyasiya funksiyasına uyğun seçilmiş funksiyalar sistemi üzrə təyin olunmuş təsadüfi kəmiyyətlərin korelyasiya momentlərinin kanonik ayrılışa daxil olan təsadüfi əmsalların və koordinat funksiyalarının, ardıcıl olaraq, məsələnin parametrlərindən asılı ifadələri alınmışdır. Parametrlərin

xüsusi qiymətlərində, korelyasiya funksiyasının ayrılışının 4-cü xüsusi cəminə uyğun approksimator qurulmuşdur. Eyni sistemdə alınmış korelyasiya səthi ilə approksimatorun səthinin yüksək dərəcədə yaxınlığı təsbit edilmişdir.

ƏDƏBİYYAT

1. Пугаев В.С. Теория случайных функций. – Москва: - 1962, - 883 с.
2. Синицын И.Н. Каноническое представление в задачах компьютерной поддержки научных исследований. – Москва: - 2009, - 768 с.
3. Sveshnikov A.A. Applied Methods of the Theory of Random Functions. - Pergamon Press, - 1966, - 332p .
4. Darolles S. and etc. , Kernel Based Nonlinear Canonical Analysis and time reversibility, Institut Fourier, - 2004 , - pp.1-52.
5. Bao Z. and etc., Canonical correlation coefficients of high-dimensional Gaussian vectors: Ann. Statist ., - 2019, 47 (1): - 612-640.
6. Dyakonov V. P., Maple 10|11|12|13|14| , - Moscow: - 2011, - 800 p.
7. Maplesoft Maple 2020.2. Baguvix, 2020 , 1.67Gb.

ИССЛЕДОВАНИЕ КАНОНИЧЕСКОГО РАЗЛОЖЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ФУНКЦИИ В СРЕДЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПАКЕТА MAPLE

Г.Р.ГАСЫМОВ, Р.Р.ДЖАФАРОВА

РЕЗЮМЕ

В работе исследуется алгоритм практического способа построения канонического разложения нестационарной случайной функции в данной области изменения аргумента и проведена проработанная реализация этого алгоритма в среде математического пакета Maple. Получена гладкая аппроксимативная поверхность с высокой точностью для заданной корреляционной функции.

Ключевые слова: случайная функция, корреляционная функция, каноническое разложение, координатная функция, пакет Maple

STUDY OF THE CANONICAL EXPANSION OF A NONSTATIONARY RANDOM FUNCTION IN THE ENVIRONMENT OF THE MAPLE MATHEMATICAL PACKAGE

G.R.GASIMOV, R.R.JAFAROVA

SUMMARY

The work examines an algorithm for a practical method of constructing a canonical expansion of a nonstationary random function in a given region of thus algorithm is carried out in the environment of the Maple mathematical package. A smooth approximative surface with high accuracy for a given correlation function is obtained.

Keywords: random function, correlation function, canonical expansion , coordinate function, Maple package

УДК 517.9

ОБ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

М.А.САДЫГОВ

Бакинский Государственный Университет
misreddin08@rambler.ru

В работе определена скалярная интегрируемость многозначных отображений и изучен ряд его свойств. В работе изучена связь между скалярной интегрируемостью многозначных отображений и интеграла Аумана многозначных отображений.

Ключевые слова: многозначное отображение, интеграл, пространство, мера

1. Введение

Скалярная интегрируемость отображений рассмотрена в [1] и [2]. Интегрируемость многозначных отображений рассмотрена в [3] и [4]. Скалярная интегрируемость многозначных отображений рассмотрена также в [5].

В дальнейшем всюду обозначается через T локально компактное пространство, т.е. T метрическое пространство и каждой точки $t \in T$ в T существует компактная окрестность. Обозначается через X - отдельное локально выпуклое пространство над \mathbb{R} . Через X^* обозначается сопряженное пространство к X , т.е. пространство непрерывных линейных функций на X . Через $X^{*'}$ обозначается алгебраическое сопряженное пространство к X^* , т.е. пространство линейных функций на X^* .

Мерой Радона (или просто мерой) на локально компактном пространстве T называется всякая линейная функция μ на векторном пространстве $K_{\mathbb{R}}(T)$ непрерывных на T числовых функций с компактным носителем, удовлетворяющая следующему условию: для любого компактного множества $E \subset T$ сужение μ на подпространство $K_{\mathbb{R}}(T, E)$ функций из $K_{\mathbb{R}}(T)$, носитель которых содержится в E , непрерывно в топологии равномерной сходимости (см.[6], с.63).

Рассмотрим также другое определение меры (см.[7, с.65]). Пусть

S -произвольное множество. Если Σ является σ -полем в S и $\mu: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ счетно-аддитивна, то μ называется мерой. Пусть (S, Ω) -топологическое пространство, то наименьшее σ -поле содержащее Ω , называется борелевским полем и обозначается через $\Sigma_B(S)$. Мера, определенная на $\Sigma_B(S)$, называется борелевской мерой. Конечная регулярная борелевская мера называется мерой Радона. Обозначим через $\text{frm}(S)$ векторное пространство всех мер Радона в S (см.[7, с.65]).

Из теоремы Рисса о представлении (см.[7, с.138]) следует, что если S -компактное метрическое пространство, то существует такой изоморфизм Ψ из $\text{frm}(S)$ в $C(S)^*$, определяемый условием $\Psi(\mu)(\varphi) = \int_S \varphi(s)\mu(ds)$, где $\mu \in \text{frm}(S)$, $C(S)$ векторное пространство действительных непрерывных функций на S , $\varphi \in C(S)$, что выполняется условие $|\Psi(\mu)| = |\mu|(S)$.

Совокупность всех непустых компактных (компактных выпуклых) подмножеств пространства X обозначим через $\text{comp}(X)$ ($\text{conv}(X)$). Совокупность всех непустых подмножеств пространства X обозначим через $P(X)$.

2. Скалярная интегрируемость многозначных отображений

Пусть $a: T \rightarrow P(X)$ многозначное отображение, μ мера Радона.

Определение 1. Многозначное отображение $a(t)$ называется скалярно μ -интегрируемым (скалярно μ -измеримым), если для любого $x^* \in X^*$ функция $q_{x^*}(t) = \inf\{\langle x^*, x \rangle : x \in a(t)\}$ μ -интегрируема (μ -измерима).

Лемма 1. Пусть $a(t)$ скалярно μ -интегрируема. Замкнутое выпуклое множество M пространства $X^{*'}$, наделенной топологией $\sigma(X^{*'}, X^*)$ и удовлетворяющее неравенство

$$\inf\{\langle x^{*'}, z^* \rangle : x^{*'} \in M\} = \int_T \inf\{\langle z^*, x \rangle : x \in a(t)\} d\mu$$

для всех $z^* \in X^*$ -единственно.

Справедливость леммы 1 следует из теоремы отделимости (см. теорему 1.3.4 [2, с.70]). Если предполагать противное и использовать теорему отделимости, то получим противоречие.

Определение 2. Интегралом от многозначных отображений $a(t)$ называется и обозначается через $\int_T a(t) d\mu$, выпуклое замкнутое множество пространства $X^{*'}$, наделенной топологией $\sigma(X^{*'}, X^*)$, определенное равенством

$$\inf\{\langle x^*, z^* \rangle : x^* \in \int_T a(t) d\mu\} = \int_T \inf\{\langle z^*, x \rangle : x \in a(t)\} d\mu$$

для всех $z^* \in X^*$.

Положив $z^* = -y^*$, где $y^* \in X^*$ имеем, что

$$\sup\{\langle x^*, y^* \rangle : x^* \in \int_T a(t) d\mu\} = \int_T \sup\{\langle y^*, x \rangle : x \in a(t)\} d\mu$$

при $y^* \in X^*$.

Замечание 1. Понятно, что если в определении скалярно μ -интегрируемости \inf заменить через \sup , то смысл определения 1 и определения 2 не изменится.

Замечание 2. Если отображение $a(t)$ не выпуклозначно, то $\int_T a(t) d\mu = \int_T \text{co} a(t) d\mu$, где $\text{co} a(t)$ выпуклая оболочка множества $a(t)$ в X .

Замечание 3. Ясно, что если $a(t)$ однозначное отображение, то из определения скалярно μ -интегрируемости многозначных отображений следует определение скалярно существенно интегрируемой вектор-функций (см. [1]).

Отметим, что в определении интеграла, топология пространства X участвует лишь через посредство сопряженного к X пространства X^* . Многозначных отображений $a(t)$ имеет интеграл и при замене топология пространства X любой отделимой локально выпуклой топологией, согласующеся с двойственностью между X и X^* .

Если $X^* = X$, то ясно, что $\int_T a(t) d\mu \subset X$.

Лемма 2. Если X отделимое локально выпуклое пространство, многозначное отображение $a(t)$ из T в $P(X)$ скалярно μ -интегрируемо, то $\int_T (-a(t)) d\mu = -\int_T a(t) d\mu$.

Доказательство. Ясно, что

$$\inf\{\langle x^*, -z^* \rangle : x^* \in \int_T a(t) d\mu\} = \int_T \inf\{\langle -z^*, x \rangle : x \in a(t)\} d\mu$$

при $z^* \in X^*$. Поэтому

$$\inf\{\langle -x^*, z^* \rangle : x^* \in \int_T a(t) d\mu\} = \int_T \inf\{\langle z^*, -x \rangle : x \in a(t)\} d\mu$$

при $z^* \in X^*$. Тогда положив $-x^* = p$ и $-x = y$ получим

$$\inf\{\langle p, z^* \rangle : p \in -\int_T a(t) d\mu\} = \int_T \inf\{\langle z^*, y \rangle : y \in -a(t)\} d\mu$$

при $z^* \in X^*$. Так как

$$\inf\{\langle p, z^* \rangle : p \in \int_T (-a(t)) d\mu\} = \int_T \inf\{\langle z^*, y \rangle : y \in -a(t)\} d\mu \text{ при } z^* \in X^*, \text{ то}$$

отсюда следует, что

$$\inf\{\langle p, z^* \rangle : p \in \int_T a(t) d\mu\} = \inf\{\langle p, z^* \rangle : p \in \int_T (-a(t)) d\mu\} \text{ при } z^* \in X^* .$$

Поэтому $\int_T (-a(t)) d\mu = -\int_T a(t) d\mu$. Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть X и Y -отделимые локально выпуклые пространства, μ положительная мера на T , многозначные отображения $a(t)$ и $b(t)$ из T в $P(X)$ скалярно μ -интегрируемы, $\alpha, \beta \in R$, Λ линейное непрерывное отображение из X в Y , E - μ -измеримое подмножество в T и $M \subset X$. Тогда

$$1) \int_T (\alpha a(t) + \beta b(t)) d\mu = \alpha \int_T a(t) d\mu + \beta \int_T b(t) d\mu ,$$

$$2) \int_E M d\mu = \int_E \overline{\text{co}} M d\mu = \mu(E) \overline{\text{co}} M , \text{ где } \overline{\text{co}} M \text{ выпуклое замкнутое оболоч-$$

ке множества M в X^* ,

$$3) \text{ Если } a(t) \subset b(t) , \text{ то } \int_T a(t) d\mu \subset \int_T b(t) d\mu ,$$

$$4) \int_E (\Lambda \circ a)(t) d\mu = \Lambda^{**} \int_E a(t) d\mu .$$

Доказательство. Докажем п.1). Если $\alpha, \beta \in R_+ = \{r \in R : r \geq 0\}$, то ясно, что

$$\begin{aligned} & \inf\{\langle x^{*'}, x^* \rangle : x^{*'} \in \int_T (\alpha a(t) + \beta b(t)) d\mu\} = \int_T \inf\{\langle x^*, x \rangle : x \in \alpha a(t) + \beta b(t)\} d\mu = \\ & = \int_T \inf\{\langle x^*, \alpha x + \beta y \rangle : x \in a(t), y \in b(t)\} d\mu = \int_T \inf\{\langle x^*, \alpha x \rangle : x \in a(t)\} d\mu + \\ & + \int_T \inf\{\langle x^*, \beta y \rangle : y \in b(t)\} d\mu = \alpha \int_T \inf\{\langle x^*, x \rangle : x \in a(t)\} d\mu + \beta \int_T \inf\{\langle x^*, y \rangle : y \in b(t)\} d\mu = \\ & = \alpha \inf\{\langle x^{*'}, x^* \rangle : x^{*'} \in \int_T a(t) d\mu\} + \beta \inf\{\langle y^{*'}, x^* \rangle : y^{*'} \in \int_T b(t) d\mu\} = \\ & = \inf\{\langle \alpha x^{*'}, x^* \rangle : x^{*'} \in \int_T a(t) d\mu\} + \inf\{\langle \beta y^{*'}, x^* \rangle : y^{*'} \in \int_T b(t) d\mu\} = \\ & = \inf\{\langle x^{*'}, x^* \rangle : x^{*'} \in \alpha \int_T a(t) d\mu + \beta \int_T b(t) d\mu\} \end{aligned}$$

при $x^* \in X^*$. Поэтому $\int_T (\alpha a(t) + \beta b(t)) d\mu = \alpha \int_T a(t) d\mu + \beta \int_T b(t) d\mu$. Если $\alpha, \beta \in R$,

то справедливость п.1) следует отсюда и из леммы 1.

Докажем п.2). При $x^* \in X^*$ имеем, что

$$\begin{aligned} & \inf\{\langle x^{*'}, x^* \rangle : x^{*'} \in \int_E M d\mu\} = \int_E \inf\{\langle x^*, x \rangle : x \in M\} d\mu = \\ & = \inf\{\langle x^*, x \rangle : x \in M\} \int_E d\mu = \mu(E) \inf\{\langle x^{*'}, x^* \rangle : x^{*'} \in \overline{\text{co}} M\} = \inf\{\langle x^{*'}, x^* \rangle : x^{*'} \in \mu(E) \overline{\text{co}} M\} = \\ & = \inf\{\langle x^{*'}, x^* \rangle : x^{*'} \in \int_E \overline{\text{co}} M d\mu\} . \end{aligned}$$

Поэтому $\int_E M d\mu = \int_E \overline{co} M d\mu = \mu(E) \overline{co} M$.

Докажем п. 3). Ясно, что

$$\begin{aligned} & \inf\{\langle x^*, x^* \rangle : x^* \in \int_T a(t) d\mu\} = \int_T \inf\{\langle x^*, x \rangle : x \in a(t)\} d\mu \geq \\ & \geq \int_T \inf\{\langle x^*, x \rangle : x \in b(t)\} d\mu = \inf\{\langle x^*, x^* \rangle : x^* \in \int_T b(t) d\mu\} \end{aligned}$$

при $x^* \in X^*$. Поэтому

$$\inf\{\langle x^*, x^* \rangle : x^* \in \int_T a(t) d\mu\} \geq \inf\{\langle x^*, x^* \rangle : x^* \in \int_T b(t) d\mu\}.$$

при $x^* \in X^*$. Отсюда следует, что $\int_T a(t) d\mu \subset \int_T b(t) d\mu$.

Докажем п. 4). Ясно, что

$$\begin{aligned} & \inf\{\langle x^*, x^* \rangle : x^* \in \int_T (\Lambda \circ a(t)) d\mu\} = \int_T \inf\{\langle x^*, u \rangle : u \in (\Lambda \circ a(t))\} d\mu = \\ & = \int_T \inf\{\langle x^*, \Lambda x \rangle : x \in a(t)\} d\mu = \int_T \inf\{\langle \Lambda^* x^*, x \rangle : x \in a(t)\} d\mu = \\ & = \inf\{\langle x^*, \Lambda^* x^* \rangle : x^* \in \int_T a(t) d\mu\} = \inf\{\langle \Lambda^{**} x^*, x^* \rangle : x^* \in \int_T a(t) d\mu\} = \\ & = \inf\{\langle u^*, x^* \rangle : u^* \in \Lambda^{**}(\int_T a(t) d\mu)\} \end{aligned}$$

при $x^* \in X^*$. Поэтому $\int_E (\Lambda \circ a)(t) d\mu = \Lambda^{**} \int_E a(t) d\mu$. Теорема доказана.

Теорема 2. Если μ и ν положительные меры на T , многозначное отображение $a(t)$ из T в $P(X)$ скалярно μ -интегрируемо и скалярно ν -интегрируемо, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$\int_T a(t) d(\alpha\mu + \beta\nu) = \alpha \int_T a(t) d\mu + \beta \int_T a(t) d\nu.$$

Доказательство. Если $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, то из 1) теоремы 1 имеем, что

$$\begin{aligned} & \inf\{\langle x^*, x^* \rangle : x^* \in \int_T a(t) d(\alpha\mu + \beta\nu)\} = \int_T \inf\{\langle x^*, x \rangle : x \in a(t)\} d(\alpha\mu + \beta\nu) = \\ & = \alpha \int_T \inf\{\langle x^*, x \rangle : x \in a(t)\} d\mu + \beta \int_T \inf\{\langle x^*, x \rangle : x \in a(t)\} d\nu = \\ & = \alpha \inf\{\langle x^*, x^* \rangle : x^* \in \int_T a(t) d\mu\} + \beta \inf\{\langle x^*, x^* \rangle : x^* \in \int_T a(t) d\nu\} = \\ & = \inf\{\langle x^*, x^* \rangle : x^* \in \alpha \int_T a(t) d\mu\} + \inf\{\langle x^*, x^* \rangle : x^* \in \beta \int_T a(t) d\nu\} = \\ & = \inf\{\langle x^*, x^* \rangle : x^* \in \alpha \int_T a(t) d\mu + \beta \int_T a(t) d\nu\}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\int_T a(t) d(\alpha\mu + \beta\nu) = \alpha \int_T a(t) d\mu + \beta \int_T a(t) d\nu$.

Если $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то справедливость теоремы 2 следует отсюда и из леммы 1. Теорема доказана.

Из п. 3) теоремы 1 следует, что верно следующее следствие.

Следствие 1. Если μ положительная мера на T , отображение $a(t)$ из T в $P(X)$ скалярно μ -интегрируемо, то

$$\{z \in X^{*'} : z = \int_T q(t) d\mu, q: T \rightarrow X \text{ скалярно сущ. интег. и } q(t) \in a(t) \text{ при } t \in T\} \subset \int_T a(t) d\mu.$$

Из следствия 1 следует, что

$$\overline{\text{co}} \{z \in X^{*'} : z = \int_T q(t) d\mu, q: T \rightarrow X \text{ скалярно сущ. интег. и } q(t) \in a(t) \text{ при } t \in T\} \subset \int_T a(t) d\mu.$$

Отметим, что предложение 3-8 и теорему 1 из [1], о скалярно существенно интегрируемых вектор-функции можно обобщить на скалярно интегрируемых многозначных отображений.

Положим $\|a(t)\| = \sup \{\|x\| : x \in a(t)\}$.

Лемма 3. Если X -сепарабельное банахово пространство, то

$$\left\| \int_T a(t) d\mu \right\| \leq \int_T \|a(t)\| d\mu.$$

Доказательство. Ясно, что если $B = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$, то $a(t) \subset \|a(t)\|B$.

Поэтому $\int_T a(t) d\mu \subset \int_T \|a(t)\| \cdot B d\mu$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \inf \{ \langle x^{*'}, x^* \rangle : x^{*'} \in \int_T a(t) d\mu \} &\geq \inf \{ \langle x^{*'}, x^* \rangle : x^{*'} \in \int_T \|a(t)\| B d\mu \} = \\ &= \int_T \inf \{ \langle x^*, x \rangle : x \in \|a(t)\| B \} d\mu = \int_T \|a(t)\| \cdot \inf \{ \langle x^*, x \rangle : x \in B \} d\mu = -\|x^*\| \int_T \|a(t)\| d\mu \end{aligned}$$

при $x^* \in X^*$. Поэтому

$$-\frac{1}{\|x^*\|} \inf \{ \langle x^{*'}, x^* \rangle : x^{*'} \in \int_T a(t) d\mu \} \leq \int_T \|a(t)\| d\mu.$$

Отсюда следует, что

$$\sup \left\{ \langle x^{*'}, -\frac{1}{\|x^*\|} x^* \rangle : x^{*'} \in \int_T a(t) d\mu \right\} \leq \int_T \|a(t)\| d\mu$$

при $x^* \in X^*$. Тогда получим, что $\left\| \int_T a(t) d\mu \right\| \leq \int_T \|a(t)\| d\mu$. Лемма доказана.

3. Связь между скалярно интегрируемостью и интегралом Аумана многозначных отображений

Если T локально компактное пространство, то через Σ_B обозначим множество всех борелевских подмножеств T (см. [7], с.65). Пусть

X банахово пространство, (T, Σ_B, μ) - пространство с положительной, конечной и регулярной мерой, $a: T \rightarrow P(X)$ μ -измеримое отображение. Интегралом Аумана (см.[4], с.13) отображения $a: T \rightarrow P(X)$ называется множество

$$(A)\int_T a(t)d\mu = \{z \in X : z = \int_T q(t)d\mu, q: T \rightarrow X \text{ интегр. по Бохнеру и } q(t) \in a(t) \text{ при } t \in T\}.$$

Лемма 4. Если X банахово пространство, отображение $a(t)$ из T в $P(X)$ выпуклозначно и μ -измеримо, то $(A)\int_T a(t)d\mu$ выпуклое множество.

Доказательство. Пусть $z_1, z_2 \in (A)\int_T a(t)d\mu$. Тогда существуют интегрируемые по Бохнеру $q_1(t) \in a(t)$ и $q_2(t) \in a(t)$ при $t \in T$ такие, что $z_1 = \int_T q_1(t)d\mu$ и $z_2 = \int_T q_2(t)d\mu$.

Поэтому $\alpha z_1 + (1-\alpha)z_2 = (A)\int_T (\alpha q_1(t) + (1-\alpha)q_2(t))d\mu$ при $\alpha \in [0,1]$. Так как $\alpha q_1(t) + (1-\alpha)q_2(t) \in a(t)$ при $\alpha \in [0,1]$, то $\alpha z_1 + (1-\alpha)z_2 \in (A)\int_T a(t)d\mu$.

Лемма доказана.

Лемма 5. Если X сепарабельное метрическое и локальное компактное пространство, T компактное метрическое пространство, (T, Σ_B, μ) - пространство с положительной, конечной и регулярной мерой, отображение $a(t)$ из T в $\text{comp}(X)$ μ -измеримо и $x^* \in X^*$, то существует μ -измеримое сечение $u: T \rightarrow X$, где $u(t) \in a(t)$ такое, что $\inf\{\langle x^*, x \rangle : x \in a(t)\} = \langle x^*, u(t) \rangle$ при $t \in T$.

Если применить следствие 2.3[8], то доказательство леммы 5 следует из теоремы 1.3.29 [3, с.53].

Пусть X банахово пространство. Отображение $a(t)$ из T в $P(X)$ называется интегрально ограниченным на T , если существует интегрируемая функция $\lambda(t)$ такая, что $\|a(t)\| \leq \lambda(t)$ при $t \in T$.

Лемма 6. Если $X = R^n$ конечномерное пространство, $a: T \rightarrow \text{conv}(X)$ μ -измеримое и интегрально ограниченное отображение, то $(A)\int_T a(t)d\mu$ выпуклое замкнутое множество.

Доказательство. Пусть $z_n \in (A)\int_T a(t)d\mu$ и z_n сходится к z . Тогда существуют интегрируемые по Бохнеру $q_n(t) \in a(t)$ при $t \in T$ такие, что $z_n = \int_T q_n(t)d\mu$. Ясно, что $\|q_n(t)\| \leq \lambda(t)$ при $t \in T$. Так как $X = R^n$ конечно-

мерное пространство, то $q_n(t)$ сходится в X почти во всех $t \in T$ предел которых обозначим через $q(t)$. Ясно, что $q(t) \in a(t)$ при почти во всех $t \in T$. Тогда получим, что $z_n = \int_T q_n(t) d\mu \rightarrow z = \int_T q(t) d\mu$. Поэтому $z \in (A) \int_T a(t) d\mu$.

Так как отображение $a(t)$ из T в $P(X)$ выпуклозначно, то из леммы 4 следует, что $(A) \int_T a(t) d\mu$ выпуклое множество. Лемма доказана.

Лемма 7. Если $X = R^n$ конечномерное пространство, T компактное метрическое пространство, (T, Σ_B, μ) - пространство с положительной, конечной и регулярной мерой, $a : T \rightarrow \text{conv}(X)$ μ -измеримое и интегрально ограниченное отображение, то $\int_T a(t) d\mu = (A) \int_T a(t) d\mu$.

Доказательство. Из следствия 1 следует, что $(A) \int_T a(t) d\mu \subset \int_T a(t) d\mu$. Докажем обратное включение. Пусть существует элемент $z \in \int_T a(t) d\mu$ такой, что $z \notin (A) \int_T a(t) d\mu$. По лемме 6 $(A) \int_T a(t) d\mu$ выпуклое замкнутое множество. Тогда существует $z^* \in X^*$ такой, что $\langle z^*, z \rangle < \inf \langle z^*, y \rangle$ при $y \in (A) \int_T a(t) d\mu$. По лемме 5 существует измеримое сечение $u : T \rightarrow X$, где $u(t) \in a(t)$ такое, что $\inf \{ \langle z^*, x \rangle : x \in a(t) \} = \langle z^*, u(t) \rangle$ при $t \in T$. Поэтому $\langle z^*, \int_T u(t) dt \rangle \leq \langle z^*, z \rangle < \inf \langle z^*, y \rangle$ при $y \in (A) \int_T a(t) d\mu$. Получим противоречие. Лемма доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурбаки Н. Интегрирование. - Москва: Наука, - 1970. - 320 с.
2. Рудин У. Функциональный анализ. - Москва: Мир, - 1976, - 443 с.
3. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д. и др. Введение в теорию многозначных отображений. - Воронеж: - 1986. - 103 с.
4. Толстоногов А.А. Дифференциальные включения в банаховом пространстве. - Новосибирск: Наука, - 1986. - 296 с.
5. Садыгов М.А. Субдифференциал высшего порядка и оптимизация. - Deutschland: LAP LAMBERT Academic Publishing, - 2014, - 359 p.
6. Бурбаки Н. Интегрирование. Меры, интегрирование мер. - Москва: Наука, - 1967. - 396 с.
7. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. - Москва: Наука, - 1977. - 623 с.
8. Marc Q. J. Measurable multivalued mappings and Lusin's Theorem. // Transactions of the American Mathematical Society, - 1968, - V.134, - №3, - 1968. - p.471-481.

ÇOXQIYMƏTLİ İNİKASIN İNTEQRALI HAQQINDA

M.A.SADIQOV

XÜLASƏ

İşdə çoxqiymətli inikasin skalyar inteqralı tərif olunur və onun bəzi xassələri öyrənilir. İşdə çoxqiymətli inikasin skalyar inteqralı ilə Auman inteqralı arasında əlaqə də öyrənilir.

Açar sözlər: çoxqiymətli inikas, inteqral, fəza, ölçü

ON THE INTEGRABILITY OF MULTI-VALUED MAPPINGS

M.A.SADYGOV

SUMMARY

In this work, the scalar integrability of multivalued mappings is determined and a number of its properties are studied. The paper examines the connection between the scalar integrability of multivalued mappings and the Aumann integral of multivalued mappings.

Keywords: multivalued mapping, integral, space, measure

UOT 517.518.12

KOŞI – STİLTYES SİNGULYAR İNTEQRALI SİNİFLƏRİ

A.Ə.ƏKBƏROV
Bakı Dövlət Universiteti
asimakbarov@mail.ru

İşdə (a, b) aralığında kəsilməz a və b uc nöqtələrində qeyri-məhdud funksiyalar sinfində $\theta(x) = -\frac{1}{x^\mu}$, $\mu \in (0, 1)$ halında $u(s)$ funksiyasının Koşi–Stilyes çevirməsinə görə $\tilde{u}(x)$ obrazının hesablanması məsələsinə baxılır.

Açar sözlər: singulyar inteqral, monoton funksiyalar, kəsilməz funksiyalar

Aşağıdakı Koşi - Stilyes singulyar inteqralına baxaq:

$$\tilde{u}(x) = \int_a^b u(s) d_s \theta(|x-s|) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\int_a^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^b \right) u(s) d_s \theta(|x-s|), \quad (1)$$

burada $u(s)$ funksiyası (a, b) -də kəsilməz və $\forall \varepsilon > 0$ və $\forall x \in (a, b)$ üçün $\theta(|x-s|)$ -ə görə $(a, x-\varepsilon] \cup [x+\varepsilon, b)$ -də inteqrallanandır. $\theta(z)$ – isə $(0, b-a]$ -də azalmayan funksiyadır.

Bu şəkildə singulyar operatorların obrazı uclarda məxsusiyyətə malik olur, ona görə də model sinif uclarda qeyri-məhdud, kəsilməz funksiyalardan ibarətdir.

1) inteqralını öyrənmək üçün $\theta(x)$ – funksiyalarının bəzi sinifləri təyin olunur.

Tərif 1. θ – ilə $(0, l)$ aralığında azalmayan elə $\theta(x)$ funksiyaları çoxluğunu işarə edəcəyik ki,

$$\theta(x+a) - \theta(x) \left(x, \alpha \in \left(0, \frac{l}{2} \right] \right); \quad \theta(\lambda x) - \theta(x) \left(\lambda = 2, 3; x \in \left(0, \frac{l}{2} \right] \right)$$

funksiyaları və $\delta \in \left(0, \frac{l}{2} \right]$ – olduqda

$$\theta(x+\alpha)-\theta(\delta+x+\alpha)-(\theta(x)-\theta(\delta+x)) \left(x, \alpha \in \left(0, \frac{l}{4} \right] \right)$$

$$\theta(2x)-\theta(\delta+2x)-(\theta(x)-\theta(\delta+x)) \left(x \in \left(0, \frac{l}{4} \right] \right)$$

funksiyaları x - ə nəzərən artmayandırlar, burada $l = b - a$.

Tərif 2. Əgər $\theta(x) \in \theta$ və $\forall x_1, x_2 \in (0, l]$ üçün $x_1 < x_2$ olduqda $\theta(x_1) < \theta(x_2)$ olarsa, yəni $\theta(x)$, $x \in (0, l]$ artan funksiyadırsa, onda $\theta(x) \in \theta_0$ işarə edəcəyik.

Teorem 1. $\theta(x) = -\frac{1}{x^\mu}$, $\mu \in (0, 1)$ funksiyası θ_0 sinfinə daxildir.

İsbatı. Doğrudan da,

1) $\theta'(x) = \left(-\frac{1}{x^\mu} \right)' = \mu \cdot \frac{1}{x^{\mu+1}} > 0$, yəni, $\theta(x) = -\frac{1}{x^\mu}$, $\mu \in (0, 1)$, $x \in (0, l]$ funksiyası artandır;

2) $[\theta(x+\alpha) - \theta(x)]' = \left[\frac{1}{x^\mu} - \frac{1}{(x+\alpha)^\mu} \right]' = \mu \left[-\frac{1}{x^{\mu+1}} - \frac{1}{(x+\alpha)^{\mu+1}} \right] < 0$;

3) $[\theta(\lambda x) - \theta(x)]' = \left[\frac{1}{x^\mu} - \frac{1}{(\lambda x)^\mu} \right]' = \frac{\mu}{x^{\mu+1}} \left[\frac{1}{\lambda^\mu} - 1 \right] < 0$; ($\lambda = 2, 3$);

4) $[\theta(x+\alpha) - \theta(\delta+x+\alpha) - (\theta(x) - \theta(\delta+x))]' =$
 $= \mu \left[\left(\frac{1}{(x+\alpha)^{\mu+1}} - \frac{1}{(\delta+x+\alpha)^{\mu+1}} \right) - \left(\frac{1}{x^{\mu+1}} - \frac{1}{(\delta+x)^{\mu+1}} \right) \right] < 0 \left(\delta \in \left(0, \frac{l}{2} \right) \right)$,

çünki, $\frac{1}{x^{\mu+1}} - \frac{1}{(\delta+x)^{\mu+1}}$ funksiyaları x -ə görə azalandır;

5) $[\theta(2x) - \theta(\delta+2x) - (\theta(x) - \theta(x+\delta))]' =$
 $= \mu \left[\left(\frac{12}{(2x)^{\mu+1}} - \frac{1}{(\delta+2x)^{\mu+1}} \right) - \left(\frac{1}{x^{\mu+1}} - \frac{1}{(\delta+x)^{\mu+1}} \right) \right] < 0$

Əgər $\theta(x) = -\frac{1}{x^\mu}$, $\mu \in (0, 1)$ şəklində olduqda (1) sinqulyar inteqralı aşağıdakı şəkllə düşür:

$$\tilde{u}(x) = \mu \int_a^b \frac{u(s) ds}{(s-x)|s-x|^\mu}. \quad (2)$$

Fərz edək ki, $u(s)$ funksiyası (a, b) -də kəsilməzdir və $\forall x(a, b)$ və $\forall \varepsilon > 0$ üçün:

$$\int_a^{x-\varepsilon} \frac{u(s)ds}{(s-x)|s-x|^\mu}$$

və

$$\int_a^b \frac{u(s)ds}{(s-x)|s-x|^\mu}$$

inteqralları var. Onda $\tilde{u}(x)$ bu inteqrallar cəminin $\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda limiti kimi başa düşülür:

$$\tilde{u}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_a^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^b \right) \frac{u(s)ds}{(s-x)|s-x|^\mu}.$$

Tutaq ki, $u(s) \equiv 1$. Onda

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_a^{x-\varepsilon} \frac{u(s)ds}{(s-x)|s-x|^\mu} = \int_a^{x-\varepsilon} \frac{ds}{(s-x)(x-s)^\mu} = - \int_a^{x-\varepsilon} \frac{ds}{(x-s)^{\mu+1}} = \\ &= \int_\varepsilon^{x-a} \frac{dt}{t^{1+\mu}} = \frac{1}{\mu} \left[\frac{1}{(x-a)^\mu} - \frac{1}{\varepsilon^\mu} \right] \end{aligned}$$

Onda

$$I_1 = \frac{1}{\mu} \left[\frac{1}{(x-a)^\mu} - \frac{1}{\varepsilon^\mu} \right]$$

Eyni qayda ilə

$$I_2 = \int_{x+\varepsilon}^b \frac{u(s)ds}{(s-x)|s-x|^\mu} = \int_{x+\varepsilon}^b \frac{ds}{(s-x)(x-s)^\mu} = - \int_\varepsilon^{b-x} \frac{dt}{t^{1+\mu}} = - \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{t^\mu} \Big|_\varepsilon^{b-x} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{\varepsilon^\mu} - \frac{1}{(b-x)^\mu} \right)$$

Deməli,

$$I_2 = \frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{\varepsilon^\mu} - \frac{1}{(b-x)^\mu} \right).$$

Beləliklə,

$$\tilde{u}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (I_1 + I_2) = \frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{(x-a)^\mu} - \frac{1}{(b-x)^\mu} \right).$$

Yəni, $u(s) \equiv 1$ olarsa, $\forall x \in (a, b)$ üçün $\tilde{u}(x)$ var və

$$\tilde{u}(x) = \frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{(x-a)^\mu} - \frac{1}{(b-x)^\mu} \right) \quad (3)$$

bərabərliyi doğrudur.

Deməli, aşağıdakı teorem doğrudur:

Teorem 2. (a, b) aralığında kəsilməz $u(s) \equiv 1$ funksiyasının Koşi – Stilyes çevrilməsinə görə $\tilde{u}(x)$ obrazı (3) düsturu ilə hesablanır.

(3) düsturundan görünürki, $\tilde{u}(x)$ obrazı $x \rightarrow a$ və $x \rightarrow b$ olduqda sonsuz böyüyür və bu obraz (a, b) intervalının a və b uclarında qeyri – məhduddur. Buna görə də, u – funksiyasına \tilde{u} funksiyasını (1) düsturu ilə qarşı qoyan Koşi – Stilyes sinqulyar inteqral operatorunu (a, b) -də kəsilməz olan və uclarda qeyri – məhdud funksiyalar sinfində öyrənilir.

ƏDƏBİYYAT

1. Абдуллаев С.К., Бабаев А.А., Некоторое оценки для особого интеграла с суммируемой плотностью. ДАН СССР, - Т.188, - №2, - 1969, - с.263-265.
2. Акперов А.А. Обратные оценки для сингулярных интегралов. Azərbaycan Respublikasının prezidenti Heydər Əliyevin 80 illik yubileyinə həsr olunan “Riyaziyyatın müasir problemləri” mövzusunda magistr, aspirant və gənc tədqiqatçılarının elmi – konfransının materialları, - Bakı: – 2003, - s.19-20.
3. Əkbərov A.Ə. Çəkili Hölder fəzalarında Koşi sinqulyar inteqral operatoru üçün qiymətləndirmələr. Bakı Universitetinin xəbərləri, Fizika – riyaziyyat elmləri seriyası, - №2, - 2019, - s.27-31.

КЛАССЫ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ КОШИ – СТИЛТЬЕСА

А.А.АКПЕРОВ

РЕЗЮМЕ

В работе рассматривается задача вычисления образа функции и (x) по разложению преобразования Коши - Стильеса в класс-функции непрерывных в интервала (a, b) , неограниченных на концах в случае $\theta(x) = -\frac{1}{x^\mu}$ $\mu \in (0,1)$

Ключевые слова: сингулярный интеграл, монотонные функции, непрерывных функции

THE CLASS OF CAUCH - STILTIYES SINGULAR INTEGRALS

A.A.AKBAROV

SUMMARY

In this work calculation of the range according to Cauchy-Stilyes translation of the function in the case $(x) = -\frac{1}{x^\mu}$, $\mu \in (0,1)$ in the class of unbounded functions at the end point a and b continuity is considered.

Keywords: singular integral, monotony functions, continuous functions

УДК 517. 962

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ ЦЕПОЧЕК В КЛАССЕ ОПЕРАТОРОВ ГИЛЬБЕРТА-ШМИДТА

Г.М.МАСМАЛИЕВ

Бакинский Государственный Университет
hacimasmaliyev@hotmail.com

Рассматриваются некоторые обобщения цепочек Тоды и Вольтерра. Изучена полубесконечных цепочек в классе вполне непрерывных операторов и в том числе в классе операторов Гильберта-Шмидта. Доказана глобальная разрешимость задачи Коши для такой цепочки.

Ключевые слова: Задача Коши, нелинейные цепочки, вполне непрерывных операторов, операторы Гильберта-Шмидта. Глобальная разрешимость.

1. Введение

Рассмотрим следующую задачу Коши для следующей нелинейной цепочки:

$$\begin{cases} \dot{a}_n = \frac{\alpha}{2} a_n (b_n - b_{n+1}) + \frac{\beta}{2} a_n (a_{n-1}^2 - a_{n+1}^2 + b_n^2 - b_{n+1}^2), \\ \dot{b}_n = \alpha (a_{n-1}^2 - a_n^2) + \beta [a_{n-1}^2 (b_{n-1} + b_n) - a_n^2 (b_n + b_{n+1})], \\ a_{-1} = 0, n = 0, 1, 2, \dots; \quad \cdot = \frac{d}{dt}, \end{cases} \quad (1)$$

$$a_n(0) = \tilde{a}_n > 0, b_n(0) = \tilde{b}_n, n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где последовательности \tilde{a}_n, \tilde{b}_n удовлетворяют соотношениям

$$\tilde{a}_n, \tilde{b}_n \in \ell_2[0, \infty).$$

Заметим, что система уравнений (1) является обобщением цепочки Тоды (при $\alpha = 1, \beta = 0$) и цепочки Вольтерра (при $\alpha = 0, \beta = 1, b_n \equiv 0$). Для различных классов начальных данных задача Коши для цепочек Тоды

и Вольтерра исследовалась в работах многих авторов (см. [1]–[3] и имеющиеся там литературу).

Настоящая работа посвящена изучению цепочки (1) в классе вполне непрерывных операторов и в том числе в классе операторов Гильберта-Шмидта. Это означает, что ассоциированный с цепочкой (1) разностный оператор

$$(L(t)y)_n = a_{n-1}y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1}, n = 0, 1, \dots, y_{-1} = 0$$

является вполне непрерывным или же оператором Гильберта-Шмидта в пространстве $\ell_2[0, \infty)$.

Будем искать решение $x(t) = (a_n(t), b_n(t))_{n=0}^\infty$ задачи (1), (2) удовлетворяющее при любом $T > 0$ условию

$$\|x(t)\|_{C([0, T]; \ell_2[0, \infty))} < \infty. \quad (3)$$

Вводим также банахово пространство последовательностей C_0 $x = (x_n)_{n=0}^\infty$, сходящихся к нулю, с нормой $\|x\| = \max_{n \geq 0} |x_n|$. Тогда $C([0, T]; C_0)$ является банаховым пространством на отрезке $[0, T]$ функций $x(t)$ со значениями в C_0 относительно нормы

$$\|x(t)\|_{C([0, T]; C_0)} = \max_{0 \leq t \leq T} \|x(t)\|_{C_0}.$$

Нас будет интересовать решение $x(t) = (a_n(t), b_n(t))_{n=0}^\infty$ задачи (1), (2) также в классе

$$\|x(t)\|_{C([0, T]; C_0)} < \infty. \quad (4)$$

Теорема 1. *Решение задачи (1), (2) существует и единственно в классе (3), если $\tilde{a}_n, \tilde{b}_n \in \ell_2[0, \infty)$.*

Теорема 2. *Решение задачи (1), (2) существует и единственно в классе (4), если $\tilde{a}_n \rightarrow 0, \tilde{b}_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.*

2. Доказательство теорем

Заметим, прежде всего, что если $a_n = a_n(t), b_n = b_n(t)$ удовлетворяют системе (1), то семейство самосопряженных операторов $L(t)$ является унитарно эквивалентным, т.е. существует семейство унитарных операторов, $U(t)$ удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} U(0) &= E, \\ L(t) &= U^{-1}(t)L(0)U(t), \end{aligned} \quad (5)$$

где E - единичный оператор, действующий в пространстве $\ell_2[0, \infty)$.

Лемма. Если унитарно эквивалентный оператор $L(t)$ есть оператор Гильберта-Шмидта то его норма $\|L(t)\|_2$ Гильберта -Шмидта постоянна относительно t :

$$\|L(t)\|_2 = \|L(0)\|_2.$$

Доказательство. Пусть оператор $L(t)$ унитарно эквивалентен и служит оператор Гильберта-Шмидта в гильбертовом пространстве H . Пусть $\{e_\alpha\}$ - ортонормированный базис пространства H . Тогда имеет место равенство

$$\|L(t)\|_2^2 = \sum_{\alpha} \|L(t)e_\alpha\|^2.$$

Пользуясь формулами (5) найдем, что

$$\begin{aligned} \|L(t)\|_2^2 &= \sum_{\alpha} (U^{-1}(t)L(0)U(t)e_\alpha, U^{-1}(t)L(0)U(t)e_\alpha) = \\ &= \sum_{\alpha} (L(0)U(t)e_\alpha, L(0)U(t)e_\alpha) = \sum_{\alpha} \|L(0)U(t)e_\alpha\|^2 = \|L(0)\|_2^2, \end{aligned}$$

где мы учли, что $(U^{-1}x, U^{-1}x) = (x, x)$ для любых $x \in H$ и система $\{u(t)e_\alpha\}$ является ортонормированным базисом.

Лемма доказана.

Докажем теорему 1. Полагая $x(t) = (a_n(t), b_n(t))_{n=0}^{\infty}$ сводим задачу (1), (2) к уравнению вида

$$x(t) = x(0) + \int_0^t F(x(\tau))d\tau,$$

где F - оператор, порожденный в $C([0, T]; \ell_2[0, \infty))$ правой частью системы уравнений (1). При этом ясно что оператор F непрерывно дифференцируем отображает пространство $C([0, T]; \ell_2[0, \infty))$ в себя. Применив принцип сжатых отображений, устанавливаем, что в некотором сегменте $[0, \delta]$ задача (1), (2) имеет единственное решение $x(t) = (a_n(t), b_n(t))_{n=0}^{\infty}$ с конечной нормы $\|x(t)\|_{C([0, T]; \ell_2[0, \infty))} < \infty$.

С другой стороны, имеет место неравенство

$$\|x(t)\|_{\ell_2[0, \infty)} \leq \|L(t)\|_2,$$

где $\|\cdot\|_2$ является нормой Гильберта-Шмидта. Пользуясь теперь леммой, находим, что

$$\|x(t)\|_{\ell_2[0,\infty)} \leq \|L(0)\|_2,$$

согласно которому решение $x(t) = (a_n(t), b_n(t))_{n=0}^{\infty}$ продолжимо на всю положительную полуось. Тем самым теорема 1 доказана.

Замечание. Из схемы доказательства следует, что решение задачи (1), (2) при любом c_0 обладает свойством

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{2a_n^2(t) + b_n^2(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \{2a_n^2(0) + b_n^2(0)\}.$$

Далее, следуя соответствующим рассуждениям из доказательства теоремы 1, устанавливаем, что в некотором сегменте $[0, \delta]$ существует решение $x(t) = (a_n(t), b_n(t))_{n=0}^{\infty}$ задачи (1), (2), удовлетворяющее условию

$$\|x(t)\|_{C([0, \delta], c_0)} < \infty.$$

С другой стороны, имеем

$$\|x(t)\|_{c_0} \leq \|L(t)\| = \|L(0)\|,$$

где мы учли, что семейство операторов $L(t)$ унитарно эквивалентно. Как явствует из последнего неравенства, решение $x(t)$ продолжимо на всю положительную полуось. Этим же завершается доказательство теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Березанский Ю.М. Интегрирование нелинейных разностных уравнений методом обратной спектральной задачи // Докл. АН СССР, - 1985, - т. 281, - N-1, - с. 16-19.
2. Teschi G. Jacobi operators and completely integrable nonlinear lattices // Math. surv. and monographs, AMS, Providence, - 2000, - v.72.
3. Юрко В.А. Об интегрировании нелинейных динамических систем методом обратной спектральной задачи // Матем. заметки, - 1995, - т. 57, - N6, - с. 945-949.
4. Тода М. Теория нелинейных решеток. - Москва: Мир, - 1984, - 264 с.
5. Masmaliyev H.M., Khanmamedov A.Kh. A solution method for system of nonlinear differential equations // Transactions of NAS Azerbaijan, - 2012, - vol. XXXII, - N1, - p. 101-106.
6. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. - Москва: Наука, - 1967.

YARIMSONSUZ ZƏNCİRLƏRİN HİLBERT-ŞMİDT OPERATORLAR SİNFİNDƏ İNTEQRALLANMASI

H.M.MƏSMALİYEV

XÜLASƏ

Toda və Voltera zəncirlərinin hər hansı ümumiləşməsinə baxılır. Tamam kəsilməz operatorlar sinfində, o cümlədən Hilbert- Şmidt operatorlar sinfində sonsuz zəncirlər öyrənilmişdir. Bu zəncirlər üçün Koşi məsələsinin qlobal həllinin varlığı isbat edilmişdir.

Açar sözlər: Koşi məsələsi, qeyri- xətti zəncirlər, tamam kəsilməz operatorlar, Hilbert- Şmidt operatorları, qlobal həll

INTEGRATION OF SEMI-INFINITE CHAINS IN THE CLASS OF HILBERT-SCHMIDT OPERATORS

H.M.MASMALİYEV

SUMMARY

Any generalization of Toda and Volterra chains is considered. Semi- infinite chains are studied in the class of completely continuous operators, including in the class of Hilbert- Schmidt operators. The existence of a global solution of the Cauchy problem for this chain is proved.

Keywords: The Cauchy problem, non-linear chains, well continuous operators, Hilbert- Schmidt operators, global solution.

УДК 517.956.4

**КВАЗИЛИНЕЙНАЯ ПАРАБОЛИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА
В ПРОСТРАНСТВЕ $W_p^{2b,1}(Q_T) \cap W_\infty^{k,1}(Q_T)$ С $n + 2b > (2b - k)p$ И $p > 1$**

¹Р.А.АМАНОВ, ²А.И.ИСМАИЛОВ, ³Э.Г.МАМЕДГАСАНОВ

¹*Национальная авиационная академия*

²*Бакинский Государственный Университет*

³*Национальная авиационная академия*

¹*amanov.rabil57@gmail.com*

²*diferensialtənliklər@mail.ru*

³*elxanmam58@gmail.com*

Рассматриваются квазилинейные параболические уравнения любого порядка $2b \geq 2$ с главным квазилинейным эллиптическим оператором при общих линейных граничных условиях. Описывается интерполяционный метод получения априорных оценок сильных решений квазилинейных параболических уравнений с неограниченными особенностями в правой части при условии наличия первой априорной оценки в пространстве суммируемых функций. Данный подход для эллиптических уравнений развивал С. И. Похожаев [1, 2].

Ключевые слова: Квазилинейная уравнения, пространства Соболева, интерполяционный метод.

1. Введение. Устанавливаются достаточные условия существования сильного решения начально-краевая задачи для квазилинейной параболический уравнений, имеющей высокий порядок по пространственным переменным и первый по времени. Для этих задач устанавливается оценка для показателя степенного роста подчиненного нелинейного оператора относительно соответствующей производной. Получение этой оценки основано на теории априорных оценок для решений рассматриваемых квазилинейных задач. В статье приведена теорема об априорных оценках решений $\|u\|_{W_p^{2b,1}(Q_T)}$ в норме пространства Соболева $W_p^{2b,1}(Q_T)$, выражаемых через норму

$$\|u\|_{k,\infty} = \sum_{|\gamma| \leq k} \sup_{Q_T} |D^\gamma u(x,t)|$$

с некоторым k , $0 \leq k \leq 2b - 1$.

Существование этих априорных оценок для $\|u\|_{W_p^{2b,1}(Q_T)}$ обусловлено соответствующими значениями показателей роста нелинейных операторов относительно производных меньшего порядка. Основное внимание уделяется вопросу о достижимости предельных степеней роста нелинейной составляющей уравнений и ограничениям на показатель ее суммируемости. Как известно, для уравнений эллиптического [1] и параболического [4] типов второго порядка предельные степени достигаются. Но для эллиптических уравнений высокого порядка это неверно, как показывают построенные в [2] примеры. В параболическом случае Вааль [5,6] доказал, что при выполнении условия типа коэрцитивности для уравнений высокого порядка и систем допустима предельная степень роста.

Доказательство разрешимости краевых задач проводится на основании приведенных теорем об априорных оценках с использованием метода Лере-Шаудера [7, с.235-236].

Пусть $a \in R_+ \equiv \{a \in R : a \geq 0\}$. Введем следующие обозначения: $x = (x_1, \dots, x_n)$ - точка в пространстве R^n ; $\Omega \subset R^n$ - ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^{2b} , $b \geq 1$; $Q_t = \Omega \times (a, a+t)$ - цилиндрическая область в пространстве R^{n+1} , $t \in R_+$; $\partial Q_t = \partial\Omega \times (a, a+t)$ - боковая поверхность цилиндра Q_t ; $Q_T = \Omega \times (0, T)$ - цилиндр заданной высоты $T > 0$.

Всюду далее функции считаются вещественнозначными. В работе используются следующие функциональные пространства [8, с.126], [9, с. 118], [10] и [11]: пространство суммируемых функций $L_p(Q_T)$, $p \geq 1$, с нормой

$$\|u\|_{p,Q_t} = \left(\int_a^{a+t} \int_{\Omega} |u(x,t)|^p dx dt \right)^{1/p};$$

анизотропное пространство саболева $W_p^{2b,1}(Q_t)$ с нормой

$$\|u\|_{W_p^{2b,1}(Q_t)} = \|u\|_{p,Q_t} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial^{2b} u}{\partial x_i^{2b}} \right\|_{p,Q_t} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{p,Q_t}.$$

Через $D^i u$ обозначим векторы из производных $D^\alpha u$ функции

$u(x, t)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, 0)$, $|\alpha| = i$. Этот вектор имеет n_i компонент, где n_i - число различных мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, 0)$, $|\alpha| = i$.

В каждом параграфе статьи применяется своя система обозначений. Поэтому в разных параграфах c_1, c_2, c_3 и т.д. могут обозначать разные постоянные.

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + Lu = f(x, t, u, Du, \dots, D^{2b-1}u), & (x, t) \in Q_T, \\ B_i u \Big|_{\partial Q_T} = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, b-1), & x \in \partial\Omega, \quad t \in (0, T), \\ u(x, 0) = 0, & x \in \Omega \end{cases} \quad (1)$$

в вещественном пространстве Соболева $W_p^{2b,1}(Q_T) \cap W_\infty^{k,1}(Q_T)$ с $W_\infty^{k,1}(Q_T) = \{u(x, t) \mid \|u\|_{k,\infty} < \infty\}$ при условии, что существует априорная оценка $\|u\|_{k,\infty}$ и $(2b-k)p < n + 2b$ с некоторым k , $0 \leq k \leq 2b-1$.

Относительно краевой задачи (1) предположим, что выполнены следующие условия.

А. 1) Пусть функция $f(x, t, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{2b-1})$ с $\xi_1 = \{\xi_\gamma \mid \gamma - \text{мультииндекс, } |\gamma| = l\}$ определена на $Q_T \times R \times R^n \times \dots \times R^{n \cdot 2b-1}$ со значениями в R и является каратеодориевой функцией, т.е. измеримой по (x, t) при всех $f(\xi_0, \dots, \xi_{2b-1}) \in R \times \dots \times R^{n \cdot 2b-1}$ и непрерывной по $(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{2b-1})$ почти при всех $(x, t) \in Q_T$.

А. 2) Пусть

$$\begin{aligned} & |f(x, t, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{2b-1})| \leq \\ & \leq b(x, t, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_k) + \sum_{l=k+1}^{2b-1} b_l(x, t, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_k) \cdot |\xi_l|^{\mu_l} \end{aligned}$$

почти при всех $(x, t) \in Q_T$ и при всех

$\xi_0 \in R$, $\xi_1 \in R^n$, \dots , $\xi_k \in R^{n_k}$, \dots , $\xi_{2b-1} \in R^{n_{2b-1}}$ при некотором k , $0 \leq k \leq 2b-1$, с неотрицательными каратеодориевыми функциями $b, b_{k+1}, \dots, b_{2b-1}$ ($b_l \equiv 0$ при $k - 2b - 1$) такими, что при любом $r \geq 0$ функция

$$\hat{b}_r(x, t) \equiv \sup \left\{ b(\cdot, \cdot, \xi_0, \dots, \xi_k) \mid |\xi_0| + \dots + |\xi_k| \leq r \right\}$$

принадлежит $L_p(Q_T)$, $p > 1$ и $(2b - k)p < n + 2b$; функция

$$\hat{b}_{l,r}(x, t) \equiv \sup \left\{ b_l(\cdot, \dots, \xi_0, \dots, \xi_k) \mid |\xi_0| + \dots + |\xi_k| \leq r \right\}$$

принадлежит $L_{q_l}(Q_T)$, $(l = k + 1, \dots, 2b - 1)$ с $q_l \geq p$. Здесь $|\xi_l| = \sum_{|\gamma|=l} |\xi_\gamma|$.

А. 3) Пусть

$$\mu_l = \frac{2b - k}{l - k} \cdot \left(1 - \frac{p}{q_l} \right), \text{ если } p < q_l < \infty, \quad (2)$$

$$\mu_l = \frac{2b - k}{l - k}, \text{ если } q_l = \infty.$$

А. 4) Пусть Lu квазилинейный эллиптический оператор порядка $2b \geq 2$ вида

$$Lu = \sum_{|\alpha|=2b} a_\alpha(x, t, u, Du, \dots, D^k u) D^\alpha u,$$

где коэффициенты a_α ($|\alpha| = 2b$) оператора L являются вещественными и непрерывными функциями на $\bar{Q}_T \times R \times R^n \times \dots \times R^{n_k}$.

Пусть линейный относительно $u(x, t)$ оператор $L_\vartheta u$, равный

$$L_\vartheta u = \sum_{|\alpha|=2b} a_\alpha(x, t, \vartheta, \dots, D^k \vartheta) D^\alpha u$$

при любой функции $\vartheta(x, t) \in C^{k,0}(\bar{Q}_T)$ есть линейный эллиптический оператор и B_i ($i = 0, 1, \dots, b - 1$) - линейные граничные дифференциальные операторы порядков $b_i \leq 2b - 1$ соответственно с вещественными коэффициентами такие, что линейная (относительно $u(x, t)$) краевая задача

$$\begin{cases} L_\vartheta u + \frac{\partial u}{\partial t} = g(x, t), & (x, t) \in Q_T, \\ B_i u \Big|_{\partial Q_T} = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, b - 1), & x \in \partial Q_T, \\ u \Big|_{t=0} = 0, & x \in \Omega \end{cases} \quad (3)$$

при любой $\vartheta \in C^{k,0}(\bar{Q}_T)$ является, коэрцитивной в пространстве $W_p^{2b,1}(Q_T) \cap W_\infty^{k,1}(Q_T)$, т.е. выполнена априорная оценка

$$\|u\|_{W_p^{2b,1}(Q_T)} \leq C \left(\|g\|_{p;Q_T} + \|u\|_{p;Q_T} \right) \quad (4)$$

с положительной постоянной C , не зависящей от $g \in L_p(Q_T)$ и от решения $u \in W_p^{2b,1}(Q_T)$ линейной задачи (3). При этом постоянная C может зависеть от модулей непрерывности коэффициентов a_α ($|\alpha| = 2b$) и модулей непрерывности функций $\vartheta, D\vartheta, \dots, D^k\vartheta$.

Отметим, что достаточные условия на коэффициенты операторов L и B_i ($i = 0, 1, \dots, b-1$), обеспечивающие коэрцитивность линейной (относительно $u(x, t)$) краевая задачи (3), изложены в работа С. Агмона, А. Дуглиса, Л. Ниренберга [12], В.А. Солонникова [9, с.112] и [10].

Квазилинейные эллиптические и параболические уравнения рассматривались в работах М.И. Вишика [13], Ю. А.Дубинского [14], Ф. Браудера [18], В. Валя [15], С.И. Похожаева [1,2], Г. Г. Лантева [3, 4] и других авторов. В работах [13, 14, 15, 18] предполагалось, что нелинейный оператор имеет дивергентную структуру, а в работах [1, 2, 3, 4] и в настоящей статье эта задача изучается без предположения о дивергентной структуре подчиненного нелинейного оператора. Это дает возможность рассмотреть более общие нелинейные подчиненные операторы.

В основе работы лежат следующие два момента: использование интерполяционного неравенства для оценки $\|D^j u\|^{\mu_l}$, $|j| = l$, $2b > l > k$ через $\|u\|_{W_p^{2b,1}(Q_t)}$ и $\|u\|_{k,\infty;Q_t}$ и применение теоремы о разрешимости линейных параболических задач в малом цилиндре Q_t [9, с. 112-129]. С помощью специальных построений показано, что коэффициенты при $\|u\|_{W_p^{2b,1}(Q_t)}$ не зависят от высоты цилиндра, когда эта высота мала. Это позволяет за счет использования цилиндров малой высоты установить достижимость предельных степеней μ_l , которые не достигаются в эллиптическом случае.

Лемма 1. Пусть $u \in W_p^{2b,1}(Q_\tau) \cap W_\infty^{k,1}(Q_\tau)$ некоторые решение задачи (1) с $p > 1$ и $n + 2b > (2b - k)p$, $Q_\tau = (t_0, t_0 + \tau) \subset Q_T$, $u(x, t_0) = 0$ и выполнены условия А.1) - А.3). Тогда

$$\|D^j u\|_{s_l; Q_\tau} \leq C_1 \cdot \|u\|_{W_p^{2b,1}(Q_\tau)}^{\theta_l} \cdot \|u\|_{k,\infty}^{1-\theta_l} + C_2 \cdot \|u\|_{k,\infty} \quad (5)$$

с положительными постоянными C_1 и C_2 , не зависящими от функции

$u(x, t)$ из $W_p^{2b,1}(Q_T) \cap W_\infty^{k,1}(Q_T)$, t_0 и τ , где

$$S_l = \frac{(2b-k)p}{l-k} \text{ с } \frac{l-k}{2b-k} \leq \theta_l < 1, \quad (6)$$

Доказательство. Согласно, функция $u(x, t)$ первоначально задана в цилиндре малой высоты τ . Продолжим ее на весь цилиндр Q_T доопределив нулем на отрезке $[0, t_0]$, а затем отобразив четным образом относительно точки $t_0 + \tau$. Подробнее,

$$\tilde{u}(x, t) = \begin{cases} 0, & t \leq t_0, \\ u(x, t), & t_0 < t < t_0 + \tau, \\ u(x, 2(t_0 + \tau) - t), & t_0 + \tau \leq t < t_0 + 2\tau, \\ 0, & t \geq t_0 + 2\tau. \end{cases}$$

Заметим, что согласно теореме о следах [9, с.116] при каждом $t \in [t_0, t_0 + \tau]$ определен след $u(x, t)$ как непрерывная в $\bar{\Omega}$ функция. В частности, вполне определены функции $u(x, t_0)$ и $u(x, t_0 + \tau)$. Очевидно, $\tilde{u} \in W_p^{2b,1}(Q_T) \cap W_\infty^{k,1}(Q_T)$, при этом

$$\|\tilde{u}\|_{k,\infty;Q_T} \leq 2 \cdot \|u\|_{k,\infty;Q_\tau}, \quad \|\tilde{u}\|_{W_p^{2b,1}(Q_T)} \leq 2 \|u\|_{W_p^{2b,1}(Q_\tau)}, \quad \|D^j \tilde{u}\|_{S_l;Q_T} \leq \|D^j u\|_{S_l;Q_\tau}. \quad (7)$$

Из интерполяционного неравенства Галярдо-Ниренберга [16] для производной $\|D^j \tilde{u}\|_p$, $|j|=l$, $2b > l > k$, имеем

$$\|D^j \tilde{u}\|_{S_l;Q_T} \leq C_1 \cdot \|\tilde{u}\|_{W_p^{2b,1}(Q_T)}^{\theta_l} \cdot \|\tilde{u}\|_{k,\infty;Q_T}^{1-\theta_l} + C_2 \cdot \|\tilde{u}\|_{k,\infty;Q_T}.$$

Непосредственный подсчет показывает, что $\theta_l = 1/\mu_l$. Учитывая неравенства (7), получим утверждение леммы 1.

Лемма 2. Пусть выполнены условия А.1) - А.2). Тогда оператор $F(u) \equiv f(x, t, u, \dots, D^{2b-1}u)$ действует вполне непрерывно из $W_p^{2b,1}(Q_\tau) \cap W_\infty^{k,1}(Q_\tau)$ в $L_p(Q_\tau)$.

Доказательство. Оценим $\|F(u)\|_{p;Q_\tau}$ с помощью условиях А.1)-А.3). Из условия А.2) следует, что

$$\|F(u)\|_{p;Q_\tau} \leq \|\hat{b}_r\|_{p;Q_\tau} + C_3 \cdot \sum_{l=k+1}^{2b-1} \sum_{|j|=l} \|\hat{b}_{l,r}\|_{q_l;Q_\tau} \cdot \|D^j u\|_{S_l;Q_\tau}^{\mu_l}$$

с

$$S_l = \frac{(2b-k)p}{l-k} \leq \frac{l-k}{2b-k} \leq \theta_l < 1,$$

и положительной постоянной C_3 не зависящей от функции $u(x, t)$ из $W_p^{2b,1}(Q_\tau) \cap W_\infty^{k,1}(Q_\tau)$, t_0 и τ . Тогда на основании равенств (2) и интерполяционных неравенств (5) с $|j| = l = k+1, \dots, 2b-1$ с указанными S_l и μ_l , соответствующими им по формуле (6), получаем

$$\begin{aligned} \|F(u)\|_{p; Q_\tau} &\leq \|\hat{b}_r\|_{p; Q_\tau} + C_3 \cdot \sum_{l=k+1}^{2b-1} \sum_{|j|=l} \|\hat{b}_{l,r}\|_{q_l; Q_\tau} \cdot \left[C_1 \cdot \|u\|_{W_p^{2b,1}(Q_\tau)}^{\theta_l} \cdot \|u\|_{k,\infty}^{1-\theta_l} + C_2 \cdot \|u\|_{k,\infty} \right]^{\mu_l} \leq \\ &\leq \|\hat{b}_r\|_{p; Q_\tau} + C_3 \cdot \sum_{l=k+1}^{2b-1} \|\hat{b}_{l,r}\|_{q_l; Q_\tau} \cdot 2^{\mu_l-1} \cdot C_1^{\mu_l} \cdot \|u\|_{W_p^{2b,1}(Q_\tau)} \cdot \|u\|_{k,\infty}^{\mu_l-1} + \\ &\quad + C_3 \cdot \sum_{l=k+1}^{2b-1} \|\hat{b}_{l,r}\|_{q_l; Q_\tau} \cdot 2^{\mu_l-1} \cdot \|u\|_{k,\infty}^{\mu_l} \cdot C_2^{\mu_l} = \\ &= \|\hat{b}_r\|_{p; Q_\tau} + \Phi_1\left(\|u\|_{k,\infty}\right) \cdot \|u\|_{W_p^{2b,1}(Q_\tau)} + \Phi_2\left(\|u\|_{k,\infty}\right), \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1\left(\|u\|_{k,\infty}\right) &= C_3 \cdot \sum_{l=k+1}^{2b-1} \|\hat{b}_{l,r}\|_{q_l; Q_\tau} \cdot C_1^{\mu_l} \cdot 2^{\mu_l-1} \cdot \|u\|_{k,\infty}^{\mu_l-1}, \\ \Phi_2\left(\|u\|_{k,\infty}\right) &= C_3 \cdot \sum_{l=k+1}^{2b-1} \|\hat{b}_{l,r}\|_{q_l; Q_\tau} \cdot C_2^{\mu_l} \cdot 2^{\mu_l-1} \cdot \|u\|_{k,\infty}^{\mu_l}, \end{aligned}$$

т.е. $\Phi_1, \Phi_2 : R_+ \rightarrow R_+$ возрастающие функции, определяемые известными данными. Это доказывает ограниченность оператора $F(u)$.

Так как $p(2b-k) < n+2b$ с некоторым k , $0 \leq k \leq 2b-1$. В силу теорем вложения Соболева [17, с. 74-95] следует, оператор вложения $I : W_p^{2b,1}(Q_\tau) \rightarrow L_{S_l}(Q_\tau)$ вполне непрерывен. В силу оценки (8) оператор $F : L_{S_l}(Q_\tau) \rightarrow L_p(Q_\tau)$ ограничен и по общим свойствам оператора суперпозиции непрерывен. Тогда оператор $F : W_p^{2b,1}(Q_\tau) \rightarrow L_p(Q_\tau)$ вполне непрерывен как композиция вполне непрерывного и непрерывного операторов.

Лемма 2 доказана.

Теорема 1. Пусть выполнены условия А.1) - А.4). Тогда существует возрастающая функция $\Phi_1 : R_+ \rightarrow R_+$ такая, что для любого возможного решения $u \in W_p^{2b,1}(Q_\tau) \cap W_\infty^{k,1}(Q_\tau)$ задачи (1) выполнена апри-

орная оценка

$$\|u\|_{W_p^{2b,1}(Q_T)} \leq \Phi\left(\|u\|_{k,\infty}\right). \quad (9)$$

Функция Φ зависит только от известных данных, входящих в условия теоремы (в том числе и от величин $\|\hat{b}_r\|_{p;Q_\tau}, \|\hat{b}_{k+1,r}\|_{q_{k+1}}, \dots, \|\hat{b}_{2b-1,r}\|_{q_{2b-1}}$ с $r = \|u\|_{k,\infty}$).

Доказательство. Рассмотрим в цилиндре $Q_\tau = \Omega \times (t_0, t_0 + \tau)$ линейную задачу

$$\begin{cases} L_\partial u + \frac{\partial u}{\partial t} = g(x, t), & (x, t) \in Q_\tau, \\ B_i u \Big|_{\partial Q_\tau} = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, b-1), & x \in \partial Q_\tau, \\ u(x, t_0), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (10)$$

Линейная краевая задача (10) (относительно $u(x, t)$) является коэрцитивной в пространстве $W_p^{2b,1}(Q_\tau) \cap W_\infty^{k,1}(Q_\tau)$, т.е. выполнена априорная оценка

$$\|u\|_{W_p^{2b,1}(Q_\tau)} \leq C_4 \left(\|g\|_{p;Q_\tau} + \|u\|_{p;Q_\tau} \right) \quad (11)$$

с положительной постоянной C_4 , не зависящей от $g \in L_p(Q_\tau)$, от решения $u \in W_p^{2b,1}(Q_\tau) \cap W_\infty^{k,1}(Q_\tau)$ и от t_0, τ . С другой стороны из теорем вложения Соболева [17, с.74], имеем

$$\|u\|_{p;Q_\tau} \leq C_5 \cdot \|u\|_{k,\infty;Q_\tau}. \quad (12)$$

Используя теперь неравенство коэрцитивности (11) с

$$g(x, t) = f\left(x, t, u(x, t), \dots, D^{2b-1}u(x, t)\right) \equiv F(u)(x, t)$$

для задачи

$$\begin{cases} Lu + \frac{\partial u}{\partial t} = f\left(x, t, Du, \dots, D^{2b-1}u\right), & (x, t) \in Q_\tau, \\ B_i u \Big|_{\partial Q_\tau} = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, b-1), & x \in \partial Q_\tau, \quad t \in (t_0, t_0 + \tau), \\ u(x, t_0), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (13)$$

оценку (12) и неравенство (8), получаем

$$\begin{aligned} & \|u\|_{W_p^{2b,1}(Q_\tau)} \leq \\ & \leq C_4 \cdot \left[\|\hat{b}_r\|_{p;Q_T} + \Phi_1(\|u\|_{k,\infty}) \cdot \|u\|_{W_p^{2b,1}(Q_\tau)} + \Phi_2(\|u\|_{k,\infty}) + C_5 \cdot \|u\|_{k,\infty} \right] \end{aligned} \quad (14)$$

Используя изложенное, подберем τ так, чтобы выполнялось неравенство $C_4 \cdot \Phi_1 \leq \frac{1}{2}$ или

$$C_3 C_4 \cdot \sum_{l=k+1}^{2b-1} C_1^{\mu_l} \cdot 2^{\mu_l-1} \cdot \|u\|_{k,\infty}^{\mu_l-1} \cdot \|\hat{b}_{l,r}\|_{q_l;Q_\tau} \leq \frac{1}{2}. \quad (15)$$

Разобьем область Q_T на цилиндры $Q^0 = \Omega \times (0, \tau)$, $Q^1 = \Omega \times (\tau, 2\tau)$, $Q^k = \Omega \times (k\tau, (k+1)\tau)$, ..., $Q^K = \Omega \times (K\tau, T)$ высоты τ . Поскольку τ фиксировано, число этих цилиндров конечно.

Пусть $u_0(x, t) \in W_p^{2b,1}(Q_T) \cap W_\infty^{k,1}(Q_T)$ решение (1). Рассмотрим задачу (1) в цилиндре Q^0 как линейную с правой частью $f_0 = f(x, t, u_0, \dots, D^{2b-1}u_0)$. Согласно неравенству (11), (12) и (14)

$$\begin{aligned} & \|u_0\|_{W_p^{2b,1}(Q^0)} \leq C_4 \cdot \left(\|f_0\|_{p;Q^0} + \|u_0\|_{p;Q^0} \right) \leq \\ & \leq C_4 \cdot \left(\|\hat{b}_r\|_{p;Q^0} + \Phi_1(\|u_0\|_{k,\infty}) \cdot \|u_0\|_{W_p^{2b,1}(Q^0)} + \Phi_2(\|u_0\|_{k,\infty}) + C_5 \cdot \|u_0\|_{k,\infty} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

В силу (15) коэффициент при $\|u_0\|_{W_p^{2b,1}(Q^0)}$ не превосходит $\frac{1}{2}$, так что неравенство (16) принимает вид

$$\|u_0\|_{W_p^{2b,1}(Q^0)} \leq \frac{1}{2} \|u_0\|_{W_p^{2b,1}(Q^0)} + \frac{1}{2} \cdot C^0,$$

где постоянная C^0 определяется из (16). Отсюда $\|u_0\|_{W_p^{2b,1}(Q^0)} \leq C^0$. Рассмотрим цилиндры Q^{k-1} и Q^k , $1 \leq k \leq K$, и допустим, что уже получена оценка $\|u_0\|_{W_p^{2b,1}(Q^{k-1})} \leq C^{k-1}$. Убедимся, что из нее следует оценка $\|u_0\|_{W_p^{2b,1}(Q^k)} \leq C^k$. Обозначим $V(x, t) = u_0(x, 2k\tau - t)$ и положим

$$\tilde{u}(x, t) = u_0(x, t) - V(x, t), \quad t \in (k\tau, (k+1)\tau).$$

Очевидно, $\tilde{u} \in W_p^{2b,1}(Q^k) \cap W_\infty^{k,1}(Q^k)$ и $\tilde{u}(x, k\tau) = 0$.

Рассмотрим в цилиндре Q^k

$$\left\{ \begin{array}{l} L\tilde{u} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = f(x, t, \tilde{u} + V, \dots, D^{2b-1}(\tilde{u} + V)) - \left(LV + \frac{\partial V}{\partial t} \right) \quad (x, t) \in Q^k, \\ \tilde{u}(x, k\tau), \quad x \in \Omega, \\ B_i \tilde{u} \Big|_{\partial Q^k} = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, b-1), \quad (x, t) \in \partial Q^k. \end{array} \right. \quad (17)$$

Функция $\tilde{u}(x, t)$ является решением задачи (17), так как согласно предположению функция $u_0(x, t)$ является решением задачи (1).

Используя оценка

$$\|\tilde{u}\|_{k, \infty; Q^k} \leq 2 \cdot \|u_0\|_{k, \infty; Q_T}, \quad (18)$$

и равенство

$$\|V\|_{W_p^{2b,1}(Q^k)} = \|u_0\|_{W_p^{2b,1}(Q^{k-1})}, \quad (19)$$

аналогично (16) получаем

$$\begin{aligned} & \|V\|_{W_p^{2b,1}(Q^k)} \leq \\ & \leq C_4 \cdot \left(\left\| f(x, t, \tilde{u} + V, \dots, D^{2b-1}(\tilde{u} + V)) - \left(\frac{\partial V}{\partial t} + LV \right) \right\|_{p; Q^k} + \|\tilde{u}\|_{p; Q^k} \right) \leq \\ & \leq C_4 \left(\|\hat{b}_r\|_{p; Q^k} + C_3 \cdot \sum_{l=k+1}^{2b-1} \sum_{|j|=l} \|\hat{b}_{l,r}\|_{q_l; Q^k} \cdot \|D^j(\tilde{u} + V)\|_{S_l; Q^k}^{\mu_l} + \right. \\ & \quad \left. + C_6 \cdot \|V\|_{W_p^{2b,1}(Q^k)} + C_5 \cdot \|u\|_{k, \infty; Q^k} \right) \leq \\ & \leq C_4 \left(\|\hat{b}_r\|_{p; Q^k} + \Phi_1(\|\tilde{u} + V\|_{k, \infty; Q^k}) \cdot \|\tilde{u} + V\|_{W_p^{2b,1}(Q^k)} + \Phi_2(\|\tilde{u} + V\|_{k, \infty; Q^k}) + \right. \\ & \quad \left. + C_6 \cdot \|u_0\|_{W_p^{2b,1}(Q^{k-1})} + C_5 \cdot \|u_0 - V\|_{k, \infty; Q^k} \right) \leq C_4 \left(\|\hat{b}_r\|_{p; Q^k} + \Phi_1(\|u_0\|_{k, \infty; Q^k}) \cdot \right. \\ & \quad \left. \cdot \|u_0\|_{W_p^{2b,1}(Q^k)} + \Phi_2(\|u_0\|_{k, \infty; Q^k}) + C_6 \cdot \|u_0\|_{W_p^{2b,1}(Q^{k-1})} + 2C_5 \cdot \|u_0\|_{k, \infty; Q^k} \right) \quad (20) \end{aligned}$$

где $C_6 > 0$ постоянная, не зависящей от функций $u(x, t)$ и от t, τ . Так

как коэффициенты и $\|u_0\|_{W_p^{2b,1}(Q^k)}$ не превосходит $\frac{1}{2}$, неравенство (20) принимает вид

$$\|\tilde{u}\|_{W_p^{2b,1}(Q^k)} \leq \frac{1}{2}\|u_0\|_{W_p^{2b,1}(Q^k)} + C_7\|u_0\|_{W_p^{2b,1}(Q^{k-1})} + C_8, \quad (21)$$

где C_7 и C_8 определяются из (20).

Заметим, что $u_0 = \tilde{u} + V$, так что

$$\|u_0\|_{W_p^{2b,1}(Q^k)} \leq \|\tilde{u}\|_{W_p^{2b,1}(Q^k)} + \|V\|_{W_p^{2b,1}(Q^k)}.$$

Используя (21) и (19), получим

$$\|u_0\|_{W_p^{2b,1}(Q^k)} \leq \frac{1}{2}\|u_0\|_{W_p^{2b,1}(Q^k)} + C_7\|u_0\|_{W_p^{2b,1}(Q^{k-1})} + C_8 + \|u_0\|_{W_p^{2b,1}(Q^{k-1})}.$$

Отсюда

$$\|u_0\|_{W_p^{2b,1}(Q^k)} \leq 2(C_7 + 1)\|u_0\|_{W_p^{2b,1}(Q^{k-1})} + 2C_8. \quad (22)$$

Согласно предположению $\|u_0\|_{W_p^{2b,1}(Q^{k-1})} \leq C^{k-1}$, так что из (22) следует $\|u_0\|_{W_p^{2b,1}(Q^k)} \leq C^k$.

Применение индукции завершает доказательство теоремы 1.

2. Разрешимость краевых задач для квазилинейных параболических уравнений произвольного порядка с априорной оценкой $\|u\|_{k,\infty}$ в случае $n + 2b > (2b - k)p$.

Рассмотрим краевую задачу (1) в вещественном пространстве Соболева $W_p^{2b,1}(Q_T) \cap W_\infty^{k,1}(Q_T)$ при условии, что существует априорная оценка $\|u\|_{k,\infty}$ не зависящая от $\lambda \in [0, 1]$, для решений параметрического семейства задач

$$\begin{cases} Lu + \frac{\partial u}{\partial t} = \lambda \cdot f(x, t, u, Du, \dots, D^{2b-1}u), & (x, t) \in Q_T, \\ B_i u \Big|_{\partial Q_T} = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, b-1), & x \in \partial\Omega, \quad t \in (0, T), \\ u(x, 0), & x \in \Omega \end{cases} \quad (23)$$

при некотором k , $0 \leq k \leq 2b - 1$ и $p(2b - k) < n + 2b$.

Относительно оператора L и граничных операторов B_i ($i = 0, 1, \dots, b - 1$) предположим, что выполнено следующее условие.

А.5) Пусть L есть квазилинейный эллиптический оператор по-

рядка $2b \geq 2$ с вещественными и непрерывными коэффициентами и B_i ($i = 0, 1, \dots, b-1$) суть линейные граничные дифференциальные операторы порядков $b_i \leq 2b-1$ соответственно с вещественными коэффициентами такие, что линейная краевая задача (3) при любых $g \in L_p(Q_T)$ однозначно разрешима в пространстве $W_p^{2b,1}(Q_T) \cap W_\infty^{k,1}(Q_T)$ так, что выполнена оценка

$$\|u\|_{W_p^{2b,1}(Q_T)} \leq C \cdot \|u\|_{p;Q_T}$$

с положительной постоянной C , не зависящей, от $g \in L_p(Q_T)$ и от решения $u \in W_p^{2b,1}(Q_T) \cap W_\infty^{k,1}(Q_T)$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия А.1) - А.3), А.5) и для параметрического семейства задач (23) при $\lambda \in [0, 1]$ существует априорная оценка $\|u\|_{k,\infty}$, не зависящая от λ с некоторым k , $0 \leq k \leq 2b-1$. Тогда существует решение задачи (1) в пространстве $W_p^{2b,1}(Q_T) \cap W_\infty^{k,1}(Q_T)$ с $p > 1$ и $(2b-k)p < n+2b$.

Доказательство. Рассмотрим параметрическое семейство задач (23) при $\lambda \in [0, 1]$. Для этого семейства задач выполнены условия теоремы 1, в силу которой существует постоянная C_1 , не зависящая от λ , такая, что для любого возможного решения $W_p^{2b,1}(Q_T) \cap W_\infty^{k,1}(Q_T)$ задачи (23) выполнено неравенство

$$\|u\|_{W_p^{2b,1}(Q_T)} \leq C_1, \quad \forall \lambda \in [0, 1]. \quad (24)$$

Из условий А.5) следует, что линейная краевая задача (3) однозначно разрешима при любой функции $g(x, t)$ из $L_p(Q_T)$, так что $u = Ag$, где A есть линейный ограниченный оператор, отвечающий задаче (3) и действующий из пространства $L_p(Q_T)$, в пространство

$$W_p^{2b,1}(Q_T; B_0) =$$

$$= \left\{ u \in W_p^{2b,1}(Q_T) \cap W_\infty^{k,1}(Q_T) \mid B_i u|_{\partial Q_T} = 0 \ (i = 0, 1, \dots, b-1), \ (x, t) \in \partial Q_T, \ u(x, 0), \ x \in \Omega \right\}$$

Тогда краевая задача (23) эквивалентна операторному уравнению

$$u = \lambda p(u) \quad (25)$$

в банаховом пространстве $W_p^{2b,1}(Q_T; B_0)$, где $p(u) = A \cdot \tilde{f}(u)$ и $\tilde{f}(u) = f(x, t, u(x, t), \dots, D^{2b-1}u(x, t))$.

Оператор \tilde{f} определен на пространстве $W_p^{2b,1}(Q_T; B_0)$ со значениями в $L_p(Q_T)$ и является вполне непрерывным оператором из $W_p^{2b,1}(Q_T; B_0)$ в $L_p(Q_T)$. Этот факт следует из теорем вложения Соболева - Кондрашева [17] на основании условий теоремы 2. Поэтому оператор p является вполне непрерывным оператором действующим в пространстве $W_p^{2b,1}(Q_T; B_0)$.

Для возможных решений $u(x, t)$ из пространства $W_p^{2b,1}(Q_T; B_0)$ в силу неравенства (24) выполнена априорная оценка

$$\|u\|_{W_p^{2b,1}(Q_T; B_0)} \leq C_2, \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

где C_2 - положительная постоянная, не зависящая на от $u(x, T)$ и ни от λ . Тогда в силу принципа Лере - Шаудера [7] уравнение (25) при $\lambda = 1$ и, следовательно краевая задача (1) имеют решение $u_0 \in W_p^{2b,1}(Q_T) \cap W_\infty^{k,1}(Q_T)$.

Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Похожаев С.И. Об уравнениях вида $\Delta u = f(x, u, Du)$. Матем. Сб., - 1980, - т. 113 (155), - № 2 (10), - с. 324-338.
2. Похожаев С.И. О разрешимости квазилинейных эллиптических уравнений произвольного порядка. Математ. Сб., - 1982, - т. 117 (159), - № 2, - с. 251-265.
3. Лаптев Г.Г. Априорные оценки сильные решений полулинейных параболических уравнений. Математ. заметки, -1998, - т.64, - вып. 4, - с.564-572.
4. Лаптев Г.Г. Об интерполяционном методе получения априорных оценок сильных решений полулинейных параболических систем второго порядка. Труды математического института им. В.А.Стеклова, - 1999, - т. 227, - с. 180-191.
5. Wahl W. von. Extention of a result of Ladyzenskaja and Ural'ceva concerning second-order parabolic equations of arbitrary order. Ann.pol. Math. - 1983, - v.41, - № 1, - p. 63-72.
6. Wahl w. Von. Klassische lösbarkeit im Groben für nichtlineare parabolische systeme und das Verhalten der Lösungen für $t \rightarrow \infty$. Nachr. Acad. Wiss. Göttingen Math.-Phys.K1, II, 1981, - № 5, - p.131-137.
7. Friedman A. Partial differential equations, - New York: Academic Press, - 1969.
8. Бесов О.В., Ильин В.А., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. - Москва: Наука, - 1975.
9. Солонников В.А. О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида. Тр. МИАН, т. 83, - Москва: Наука, - 1965.
10. Bilalov B, T., Sadigova S.R. On solvability in the small of Higher order elliptic equations in Rearrangement invariant spaces, Siberian Mathematical j., - v.63, - p. 425- 437 (2022).

11. Amanov R.A., İsmailov A. I. On equations of the form $\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, t, u, Du)$. Azerbaijan journal of mathematics, - 2023, - v.13, - № 2, p.
12. Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. - Москва: ИЛ, - 1962.
13. Вишик М.И. О разрешимости краевых задач для квазилинейных параболических уравнений высших порядков. Матем. сб., - 1962, - т. 101, - с.289-325.
14. Дубинский Ю.А. Квазилинейные Эллиптические и параболические уравнения любого порядка. Успехи матем. наук, XXIII, - вып. 1 (139) (1968), - с. 45-90.
15. Von Wahl W. Semilinear elliptic and parabolic equations of arbitrary order. Proc. Royal Soc. Edinburgh, - 1978, - v. 78A, - p. 193-207.
16. Nirenberg L. An extended interpolation inequality. Ann. Sc. Norm. Sup. pisa, - 1966, V.XX, Fasc., - IV, - p. 733-737.
17. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд.: Наука, 1988.
18. Browder F.E. Proc. Symp. Pure Math. Providence R.-J. Amer. Math. Soc., - 1973, - v.23, - p.269-289.

$n + 2 > (2b - k)p$ VƏ $p > 1$ OLDUQDA $W_p^{2b,1}(Q_T) \cap W_\infty^{k,1}(Q_T)$ FƏZASINDA
KVAZİXƏTTİ PARABOLİK MƏSƏLƏ

R.A.AMANOV, A.İ.İSMAYİLOV, E.H.MƏMMƏDHƏSƏNOV

XÜLASƏ

$2b$ -tərtib kvazixətti parabolik tip tənlik üçün bir sinif ümumi sərhəd məsələsi uyğun Sobolev fəzasında öyrənilir.

Açar sözlər: kvazixətti tənliklər, Sobolev fəzası, interpolyasiya üsulu

A QUASIPARABOLIC PROBLEM IN THE SPACE
 $W_p^{2b,1}(Q_T) \cap W_\infty^{k,1}(Q_T)$ FOR $n + 2 > (2b - k)p$ AND $p > 1$

R.A.AMANOV, A.İ.İSMAYİLOV, E.H.MAMEDHASANOV

SUMMARY

A class of general boundary value problem for $2b$ - order quasilinear parabolic equation is studied in an appropriate Sobolev space.

Keywords: quasilinear equations, Sobolev space, interpolation method

УДК 517.977.56

**ОБ УСЛОВИЯХ ОПТИМАЛЬНОСТИ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ
ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ****А.В.КЕРИМОВА***Бакинский Государственный Университет*
kamilbmansimov@gmail.com

В статье рассматривается одна ступенчатая задача оптимального управления, описываемая на различных «отрезках времени» линейными разностными и интегро-дифференциальными уравнениями типа Вольтерра с функционалом типа Больца.

Доказано необходимое и достаточное условие оптимальности типа принципа максимума Л.С.Понтрягина. В случае нелинейного выпуклого критерия качества доказана достаточность принципа максимума.

Ключевые слова: разностное уравнение, интегро-дифференциальное уравнение, необходимое и достаточное условие оптимальности, оптимальное управление, формула приращения.

1. Введение

Исследованию различных ступенчатых задач оптимального управления посвящен ряд работ. Среди них отметим работы [1-6], в которых процессы описываются различными дифференциальными уравнениями или же разностными уравнениями.

В предлагаемой работе рассматривается одна двухэтапная задача оптимального управления, описываемая в первом этапе линейным разностным уравнением Вольтерра, а во втором этапе линейным интегро-дифференциальным уравнением Вольтерра.

Таким образом, рассматривается ступенчатая дискретно-непрерывная задача оптимального управления.

Установлен ряд условий оптимальности.

2. Постановка задачи

Пусть $T_1 = \{t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1\}$ – заданная конечная последовательность натуральных чисел, а $T_2 = [t_1, t_2]$ – заданный отрезок. Через $U_1 \subset R^r$ и $U_2 \subset R^q$ – обозначим некоторые непустые и ограниченные множества.

Предположим, что управляемый, двухэтапный процесс описывается системами линейных разностных и интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра

$$x_1(t+1) = A_1(t)x_1(t) + f_1(t, u_1(t)) + \sum_{\tau=t_0}^t [B_1(t, \tau)x_1(\tau) + K_1(t, \tau, u_1(\tau))], t \in T_1, \quad (1)$$

$$x_1(t_0) = x_{10}, \quad (2)$$

$$\dot{x}_2(t) = A_2(t)x_2(t) + f_2(t, u_2(t)) + \int_{t_1}^t [B_2(t, \tau)x_2(\tau) + K_2(t, \tau, u_2(\tau))]d\tau, t \in T_2, \quad (3)$$

$$x_2(t_1) = Cx_1(t_1). \quad (4)$$

Здесь $A_1(t), B_1(t, \tau), (A_2(t), B_2(t, \tau))$ – заданные дискретные (непрерывные по совокупности переменных) $(n \times n)$ матричные функции, $f_1(t, u_1), K_1(t, \tau, u_1)$ ($f_2(t, u_2), K_2(t, \tau, u_1)$) – заданные дискретные (непрерывные по совокупности переменных) n -мерные вектор-функции, C – заданная постоянная $(n \times n)$ матрица, x_{10} – заданный n -мерный постоянный вектор, $u_1(t)$ ($u_2(t)$) – r (q) – мерный дискретный (кусочно-непрерывный, с конечным числом точек разрыва первого рода) вектор управляющих воздействий, со значениями из множества U_1 (U_2), т.е.

$$\begin{aligned} u_1(t) &\in U_1 \subset R^r, t \in T_1, \\ u_2(t) &\in U_2 \subset R^q, t \in T_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Пару $(u_1(t), u_2(t))$ с вышеприведенными свойствами назовем допустимым управлением.

Предполагается, что каждому допустимому управлению $(u_1(t), u_2(t))$ соответствует единственное дискретное (кусочно-гладкое) решение $x_1(t)(x_2(t))$ задачи (1)-(2) ((3)-(4)).

На решениях задач (1)-(2), (3)-(4), порожденных всевозможными допустимыми управлениями определим функционал

$$\begin{aligned} J(u_1, u_2) &= c'x_1(t_1) + d'x_2(t_2) + \\ &+ \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left[\sum_{\tau=t_0}^t [D'_1(t, \tau)x_1(\tau) + F_1(t, \tau, u_1(\tau))] \right] + \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{t_1}^t [D'_2(t, \tau)x_2(\tau) + F_2(t, \tau, u_2(\tau))]d\tau \right] dt. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь c и d – заданные постоянные векторы, $D_1(t, \tau)$ ($D_2(t, \tau)$) – заданная n -мерная дискретная (непрерывная) вектор-функция, а $F_1(t, \tau, u_1)$ ($F_2(t, \tau, u_2)$) – заданная дискретная по (t, τ) и непрерывная по u_1 (непрерывная по совокупности переменных) скалярная функция.

Как видно, функционал (6) в рассматриваемой задаче является довольно общим линейным функционалом.

Рассмотрим задачу нахождения о минимуме функционала (6) при ограничениях (1)-(5).

Как обычно, допустимое управление $(u_1(t), u_2(t))$, доставляющее минимальное значение функционалу (6) при ограничениях (1)-(5), назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $(u_1(t), u_2(t), x_1(t), x_2(t))$ – оптимальным процессом.

3. Построение формулы приращения и условия оптимальности

Пусть $(u_1(t), u_2(t), x_1(t), x_2(t))$ и $(\bar{u}_1(t) = u_1(t) + \Delta u_1(t), \bar{u}_2(t) = u_2(t) + \Delta u_2(t), \bar{x}_1(t) = x_1(t) + \Delta x_1(t), \bar{x}_2(t) = x_2(t) + \Delta x_2(t))$ – две допустимые процессы.

Запишем приращение функционала (6):

$$\begin{aligned} \Delta J(u_1, u_2) &= J(\bar{u}_1, \bar{u}_2) - J(u_1, u_2) = c' \Delta x_1(t_1) + d' \Delta x_2(t_2) + \\ &+ \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} \left[\sum_{\tau=t_0}^t \left[D_1'(t, \tau) \Delta x_1(\tau) + (F_1(t, \tau, \bar{u}_1(\tau)) - F_1(t, \tau, u_1(\tau))) \right] \right] + \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{t_1}^t \left[D_2'(t, \tau) \Delta x_2(\tau) + (F_2(t, \tau, \bar{u}_2(\tau)) - F_2(t, \tau, u_2(\tau))) \right] d\tau \right] dt. \quad (7) \end{aligned}$$

Из введенных обозначений ясно, что $(\Delta x_1(t), \Delta x_2(t))$ является решением задачи

$$\begin{aligned} \Delta x_1(t+1) &= A_1(t) \Delta x_1(t) + (f_1(t, \bar{u}_1(t)) - f_1(t, u_1(t))) + \\ &+ \sum_{\tau=t_0}^t \left[B_1(t, \tau) \Delta x_1(\tau) + (K_1(t, \tau, \bar{u}_1(\tau)) - K_1(t, \tau, u_1(\tau))) \right], \quad (8) \end{aligned}$$

$$\Delta x_1(t_0) = 0, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x}_2(t) &= A_2(t) \Delta x_2(t) + (f_2(t, \bar{u}_2(t)) - f_2(t, u_2(t))) + \\ &+ \int_{t_1}^t \left[B_2(t, \tau) \Delta x_2(\tau) + (K_2(t, \tau, \bar{u}_2(\tau)) - K_2(t, \tau, u_2(\tau))) \right] d\tau, \quad (10) \end{aligned}$$

$$x_2(t_1) = C\Delta x_1(t_1). \quad (11)$$

Пусть $\psi_i(t)$, $i = 1, 2$ пока неизвестные n -мерные вектор-функции.

Из тождеств (8) и (10) после некоторых преобразований, получим справедливость соотношений.

$$\begin{aligned} & \psi'_1(t_1 - 1)\Delta x_1(t_1) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'_1(t-1)\Delta x_1(t) = \\ & = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'_1(t) \left[A_1(t)\Delta x_1(t) + \left(f_1(t, \bar{u}_1(t)) - f_1(t, u_1(t)) \right) \right] + \\ & \quad + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left[\sum_{\tau=t}^{t_1-1} \psi'_1(\tau) \left[B_1(\tau, t)\Delta x_1(t) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left(K_1(\tau, t, \bar{u}_1(t)) - K_1(\tau, t, u_1(t)) \right) \right] \right] \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \psi'_2(t_2)\Delta x_2(t_2) - \psi'_2(t_1)C\Delta x_1(t_1) - \int_{t_1}^{t_2} \psi'_2(t)\Delta x_2(t)dt = \\ & = \int_{t_1}^{t_2} \left[\psi'_2(t)A_2(t)\Delta x_2(t) + \left(f_2(t, \bar{u}_2(t)) - f_2(t, u_2(t)) \right) \right] dt + \\ & \quad + \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_t^{t_2} \psi'_2(\tau) \left[B_2(\tau, t)\Delta x_2(t) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left(K_2(\tau, t, \bar{u}_2(t)) - K_2(\tau, t, u_2(t)) \right) \right] d\tau \right] dt. \quad (13) \end{aligned}$$

Теперь для рассматриваемой задачи введем аналоги Гамильто-ниана в виде

$$\begin{aligned} H_1(t, u_1(t), \psi_1(t)) &= \psi'_1(t)f_1(t, u_1(t)) + \\ & + \sum_{\tau=t}^{t-1} \psi'_1(\tau)K_1(\tau, t, u_1(t)) - \sum_{\tau=t}^{t-1} F_1(\tau, t, u_1(t)), \\ H_2(t, u_2(t), \psi_2(t)) &= \psi'_2(t)f_2(t, u_2(t)) + \\ & + \int_t^{t_2} \psi'_2(\tau)K_2(\tau, t, u_2(t))d\tau - \int_t^{t_2} F_2(\tau, t, u_2(t))d\tau. \end{aligned}$$

Тогда формула приращения (7) примет вид

$$\begin{aligned}
\Delta J(u_1, u_2) &= c' \Delta x_1(t_1) + d' \Delta x_2(t_2) + \psi_1'(t_1 - 1) \Delta x_1(t_1) + \\
&+ \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi_1'(t-1) \Delta x_1(t) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi_1'(t) A_1(t) \Delta x_1(t) - \\
&- \sum_{t=t_0}^{t_1-1} [H_1(t, \bar{u}_1(t), \psi_1(t)) - H_1(t, u_1(t), \psi_1(t))] + \\
&+ \psi_2'(t_2) \Delta x_2(t_2) - \psi_2'(t_1) C \Delta x_1(t_1) - \int_{t_1}^{t_2} \dot{\psi}_2'(t) \Delta x_2(t) - \\
&- \int_{t_1}^{t_2} \psi_2'(t) A_2(t) \Delta x_2(t) dt - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left[\sum_{\tau=t}^{t_1-1} \psi_1'(\tau) B_1(\tau, t) \Delta x_1(t) \right] + \\
&+ \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left[\sum_{\tau=t}^{t_1-1} D_1'(\tau, t) \Delta x_1(t) \right] - \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_t^{t_2} \psi_2'(\tau) B_2(\tau, t) \Delta x_2(t) d\tau \right] dt + \\
&+ \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_t^{t_2} D_2'(\tau, t) d\tau \right] \Delta x_2(t) dt - \\
&- \int_{t_1}^{t_2} [H_2(t, \bar{u}_2(t), \psi_2(t)) - H_2(t, u_2(t), \psi_2(t))] dt. \quad (14)
\end{aligned}$$

Пусть $\psi_i(t), i = 1, 2$ являются решениями соответственно следующих задач:

$$\begin{aligned}
\psi_1(t-1) &= A_1'(t) \psi_1(t) + \sum_{\tau=t}^{t_1-1} B_1'(\tau, t) \psi_1(\tau) - \sum_{\tau=t}^{t_1-1} D_1(\tau, t), \\
\psi_1(t_1-1) &= -c + C' \psi_2(t_1), \\
\dot{\psi}_2(t) &= -A_2'(t) \psi_2(t) - \int_t^{t_2} B_2'(\tau, t) \psi_2(\tau) d\tau - \int_t^{t_2} D_2(\tau, t) d\tau, \\
\dot{\psi}_2(t_2) &= -d.
\end{aligned}$$

Тогда из формулы приращения (14) следует, что

$$\begin{aligned}
&J(\bar{u}_1, \bar{u}_2) - J(u_1, u_2) \\
&= - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} [H_1(t, \bar{u}_1(t), \psi_1(t)) - H_1(t, u_1(t), \psi_1(t))] -
\end{aligned}$$

$$- \int_{t_1}^{t_2} [H_2(t, \bar{u}_2(t), \psi_2(t)) - H_2(t, u_2(t), \psi_2(t))] dt. \quad (15)$$

При помощи формулы приращения (15) доказывается

Теорема 1. Для оптимальности допустимого управления $(u_1(t), u_2(t))$ необходимо и достаточно, чтобы неравенства

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} [H_1(t, v_1(t), \psi_1(t)) - H_1(t, u_1(t), \psi_1(t))] \leq 0, \quad (16)$$

$$H_2(\theta, v_2(\theta), \psi_2(\theta)) - H_2(\theta, u_2(\theta), \psi_2(\theta)) \leq 0 \quad (17)$$

выполнялись для всех $v_1(t) \in U_1$, $t \in T_1$ и $v_2 \in U_2$, $\theta \in [t_1, t_2)$ соответственно.

Здесь $\theta \in [t_1, t_2)$ произвольная точка непрерывности управляющей функции $u_2(t)$.

Доказательство.

Необходимость. Пусть управление $(u_1(t), u_2(t))$ оптимально. Тогда из формулы приращения (15) следует, что для любого допустимого управления $v_1(t)$

$$\begin{aligned} & J(v_1, u_2) - J(u_1, u_2) = \\ & = - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} [H_1(t, v_1(t), \psi_1(t)) - H_1(t, u_1(t), \psi_1(t))] \geq 0, \end{aligned} \quad (18)$$

а для любого допустимого управления $\bar{u}_2(t) = u_2(t) + \Delta u_2(t)$

$$\begin{aligned} & J(u_1, \bar{u}_2) - J(u_1, u_2) = \\ & = - \int_{t_1}^{t_2} [H_2(t, \bar{u}_2(t), \psi_2(t)) - H_2(t, u_2(t), \psi_2(t))] dt \geq 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Поэтому из неравенства (18) следует условие оптимальности (16).

А из неравенства (19) получаем, что

$$\int_{t_1}^{t_2} [H_2(t, u_2(t) + \Delta u_2(t), \psi_2(t)) - H_2(t, u_2(t), \psi_2(t))] dt \leq 0. \quad (20)$$

Пусть $v_2 \in U_2$ произвольный вектор, $\theta \in [t_1, t_2)$ произвольная точка непрерывности управления $u_2(t)$, а $\varepsilon > 0$ произвольное достаточно малое число, такое, что $\theta + \varepsilon < t_1$.

Специальное приращение управления $u_2(t)$ определим по формуле

$$\Delta u_2(t; \varepsilon) = \begin{cases} v_2 - u_2(t), & t \in [\theta, \theta + \varepsilon), \\ 0, & t \in T_2 \setminus [\theta, \theta + \varepsilon). \end{cases} \quad (21)$$

Учитывая формулу (21) в неравенстве (20) получим, что

$$\begin{aligned} & \int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} [H_2(t, v_2, \psi_2(t)) - H_2(t, u_2(t), \psi_2(t))] dt = \\ & = \varepsilon [H_2(\theta, v_2, \psi_2(\theta)) - H_2(\theta, u_2(\theta), \psi_2(\theta))] + o(\varepsilon) \leq 0. \end{aligned}$$

Отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$, следует неравенство (17).

Аналогичными рассуждениями доказывается достаточность условий оптимальности (16) и (17).

Пусть выполняются неравенства (16) и (17).

Это означает, что для всех допустимых управлений $v_1(t)$ и $v_2(\theta)$ выполняются неравенство (18) и неравенство

$$H_2(\theta, v_2(\theta), \psi_2(\theta)) - H_2(\theta, u_2(\theta), \psi_2(\theta)) \leq 0. \quad (22)$$

Отсюда получаем, что

$$\int_{t_1}^{t_2} [H_2(\theta, v_2(\theta), \psi_2(\theta)) - H_2(\theta, u_2(\theta), \psi_2(\theta))] d\theta \leq 0. \quad (23)$$

Учитывая неравенства (18) и (23) получаем, что

$$J(v_1, v_2) - J(u_1, u_2) \geq 0.$$

Следовательно, управление $(u_1(t), u_2(t))$ оптимально.

Этим теорема доказана.

3. Случай нелинейного функционала

Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$\begin{aligned} & J(u_1, u_2) = \varphi_1(x_1(t_1)) + \varphi_2(x_2(t_2)) + \\ & + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left[\sum_{\tau=t_0}^t [D'_1(t, \tau)x_1(\tau) + F_1(t, \tau, u_1(\tau))] \right] + \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{t_1}^t [D'_2(t, \tau)x_2(\tau) + F_2(t, \tau, u_2(\tau))] d\tau \right] dt, \quad (24) \end{aligned}$$

при ограничениях (1)-(5).

Здесь $\varphi_i(x_i), i = 1, 2$ – заданные непрерывно дифференцируемые и выпуклые скалярные функции, а остальные данные задачи удовлетворяют тем условиям гладкости, которые приведены в постановке задачи (1)-(6).

Пусть $(u_1(t), u_2(t), x_1(t), x_2(t))$ – некоторый допустимый процесс.

Введем аналоги функции Гамильтона

$$M_1(t, u_1(t), p_1(t)) = p_1'(t)f_1(t, u_1(t)) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\tau=t}^{t_1-1} p_1'(\tau)K_1(\tau, t, u_1(t)) - \sum_{\tau=t}^{t_1-1} F_1(\tau, t, u_1(t)), \\
& M_2(t, u_2(t), p_2(t)) = p_2'(t)f_2(t, u_2(t)) + \\
& + \int_{t_1}^{t_2} p_2'(\tau)K_2(\tau, t, u_2(t))d\tau - \int_{t_1}^{t_2} F_2(\tau, t, u_2(t))d\tau.
\end{aligned}$$

Здесь $p_i(t), i = 1, 2$ — n -мерные вектор-функции, решения задач

$$p_1(t-1) = A_1'(t)p_1(t) + \sum_{\tau=t}^{t_1-1} B_1'(\tau, t)p_1(\tau) - \sum_{\tau=t}^{t_1-1} D_1(\tau, t), \quad (25)$$

$$p_1(t_1-1) = C'\psi_2(t_1) - \frac{\partial \varphi_1(x_1(t_1))}{\partial x_1}, \quad (26)$$

$$\dot{p}_2(t) = -A_2'(t)p_2(t) - \int_t^{t_2} B_2'(\tau, t)p_2(\tau)d\tau + \int_t^{t_2} D_2(\tau, t)d\tau. \quad (27)$$

$$p_2(t_2) = -\frac{\partial \varphi_2(x_2(t_2))}{\partial x_2}. \quad (28)$$

По формуле Тейлора получим, что

$$\varphi_1(\bar{x}_1(t_1)) - \varphi_1(x_1(t_1)) = \frac{\partial \varphi_1'(x_1(t_1))}{\partial x_1} \Delta x_1(t_1) + o_1(\|\Delta x_1(t_1)\|),$$

$$\varphi_2(\bar{x}_2(t_2)) - \varphi_2(x_2(t_2)) = \frac{\partial \varphi_2'(x_2(t_2))}{\partial x_2} \Delta x_2(t_2) + o_2(\|\Delta x_2(t_2)\|).$$

Здесь $\|\alpha\|$ норма вектора $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)'$ определяемая формулой $\|\alpha\| = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|$, а $o(\alpha)$ есть величина более высокого порядка чем α , т. е. $\frac{o(\alpha)}{\alpha} \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$.

Учитывая выражения функций Гамильтона-Понтрягина и сопряженную систему (25)-(26), (27)-(28), приращение функционала (24) по аналогии с доказательством формулы (15) представляется в виде

$$\begin{aligned}
\Delta J(u_1, u_2) = & - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} [M_1(t, \bar{u}_1(t), p_1(t)) - M_1(t, u_1(t), p_1(t))] - \\
& - \int_{t_1}^{t_2} [M_2(t, \bar{u}_2(t), p_2(t)) - M_2(t, u_2(t), p_2(t))] dt + \\
& + o_1(\|\Delta x_1(t_1)\|) + o_2(\|\Delta x_2(t_2)\|). \quad (29)
\end{aligned}$$

С помощью формулы приращения (29) доказываемся

Теорема 2. Для оптимальности допустимого управления $(u_1(t), u_2(t))$ в задаче (1)-(5), (24) достаточно, чтобы неравенства

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} [M_1(t, v_1(t), p_1(t)) - M_1(t, u_1(t), p_1(t))] \leq 0, \quad (30)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} [M_2(t, v_2(t), p_2(t)) - M_2(t, u_2(t), p_2(t))] dt \leq 0 \quad (31)$$

выполнялись для всех допустимых управлений $v_1(t)$, а $v_2(t)$ соответственно.

Доказательство.

Пусть $v_1(t)$ и $v_2(t)$ произвольные допустимые управления и $u_1(t)$ и $u_2(t)$ такие допустимые управления, что для них выполняются неравенства (30), (31).

Из формулы приращения (29) получаем, что

$$\begin{aligned} J(v_1, v_2) - J(u_1, u_2) = & - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} [M_1(t, v_1(t), p_1(t)) - M_1(t, u_1(t), p_1(t))] - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} [M_2(t, \bar{u}_2(t), p_2(t)) - M_2(t, u_2(t), p_2(t))] dt + \\ & + o_1(\|\Delta x_1(t_1)\|) + o_2(\|\Delta x_2(t_2)\|). \end{aligned} \quad (32)$$

По предположению функции $\varphi_i(x_i)$, $i = 1, 2$ — выпуклы. Поэтому

$$o_i(\|\Delta x_i(t_i)\|) \geq 0, i = 1, 2.$$

Тогда из (32) получаем, что

$$\begin{aligned} J(v_1, v_2) - J(u_1, u_2) \geq & - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} [M_1(t, v_1(t), p_1(t)) - M_1(t, u_1(t), p_1(t))] - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} [M_2(t, \bar{u}_2(t), p_2(t)) - M_2(t, u_2(t), p_2(t))] dt. \end{aligned}$$

Отсюда в силу неравенств (30) и (31) получаем, что

$$J(v_1, v_2) \geq J(u_1, u_2).$$

Последнее неравенство означает, что допустимое управление $(u_1(t), u_2(t))$ является оптимальным управлением.

Этим теорема доказана.

4. Заключение

Рассматривается одна дискретно-непрерывная ступенчатая задача оптимального управления, описываемая совокупностью линейных разностных и интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра и функционалом типа Больца.

Применяя один вариант метода приращений доказано необходимое и достаточное условие оптимальности типа принципа максимума Л.С.Понтрягина. В случае выпуклости и дифференцируемости критерия качества установлено достаточное условие оптимальности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Розова В.Н. Оптимальное управление ступенчатыми системами с неинтегральным функционалом // Вестник РУДН, Сер. прикл. матем. и компьютерная математика. - 2002. - № 1(1). - с. 131-136.
2. Захаров Г.К. Оптимизация ступенчатых систем с управляемыми условиями перехода // Автоматика и телемеханика. - 1993. - № 6. - с. 32-36.
3. Габелко К.Н. Последовательное улучшение многоэтапных процессов // Автоматика и телемеханика. - 1974, - № 11, - с. 72-80.
4. Исмаилов Р.Р., Мансимов К.Б. Об условиях оптимальности в одной ступенчатой задаче управления // Журн. Выч. мат. и мат. физики. - 2006. - №10. - с. 1758-1770.
5. Магеррамов Ш.Ф., Мансимов К.Б. Оптимизация одного класса дискретных ступенчатых систем управления // Журн. Вычисл. Мат. и Мат. физики. - 2001, - № 3, - с. 360-366.
6. Ащепков Л.Т. Оптимальное управление разрывными системами. - Н.: Наука, 1987, - 226 с.

BİR XƏTTİ OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNDƏ OPTİMALLIQ ŞƏRTLƏRİ HAQQINDA

A.V.KƏRİMOVA

XÜLASƏ

Məqalədə müxtəlif zaman parçalarında Volterra tipli fərq tənliklər sistemi və Volterra tip inteqro-diferensial tənliklər sistemi ilə təsvir olunan bir iki mərhələli xətti optimal idarəetmə məsələsinə baxılır.

Optimallıq üçün diskret-kəsilməz maksimum prinsipi şəklində zəruri və kafi şərt isbat edilmişdir.

Funksional qabarıq və qeyri-xətti olan halda optimallıq üçün kafi şərt isbat edilmişdir.

Açar sözlər: fərq tənliyi, inteqro-diferensial tənlik, optimallıq üçün zəruri və kafi şərt, optimal idarə, artım düsturu

ON THE OPTIMALITY OF ONE LINEAR OPTIMAL CONTROL PROBLEM

A.V.KERIMOVA

SUMMARY

The article considers one stepwise optimal control problem, described on various “time intervals” by linear difference and integro-differential equations of Volterra type and a functional of Boltz type.

A necessary sufficient condition for optimality of the type of L.S.Pontryagin's maximum principle is proven. In the case of a nonlinear convex quality criterion, the sufficiency of the maximum principle is proven.

Keywords: difference equation, integro-differential equation, necessary and sufficient condition for optimality, optimal control, Increment formula

FİZİKA**UOT 533.92****BARYER BOŞALMALARINDA
BAŞ VERƏN ELEMENTAR PROSESLƏR****B.B.DAVUDOV, T.X.HÜSEYNOV***Bakı Dövlət Universiteti**dbenyameddin@gmail.com, htarlan@mail.ru*

Havada baryer boşalmalarında baş verən elementar proseslər tədqiq edilmişdir. Məlum olmuşdur ki, baryer boşalmasında baş verən elementar proseslərdə müxtəlif növ yüklü zərrəciklərin rolu boşalmanın parametrlərindən və xarici şəraitdən asılıdır. Oksigen molekulu ilə elektronun qeyri-elastiki toqquşması reaksiyasının maksimal effektiv kəsiyi elektronun 6,7 eV enerjisində baş verir. Bu halda oksigen molekulunun dissosiasiyasına 5,1 eV enerji düşür.

Açar sözlər: birbaryer boşalması, qeyri-elastiki toqquşmalar, elementar proseslər, həyəcanlanmış molekul, dissosiativ zəbt olunma prosesi, yükötürmə prosesi

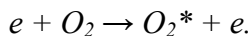
Aparılan tədqiqat işlərindən məlum olduğu kimi, ozonatorların iş prinsipi bir və ya ikibaryerli elektrik boşalmalarına əsaslanır. Həmin elektrik boşalmalarında baş verən fiziki-kimyəvi proseslər çox mürəkkəbdir və tam öyrənilməmişdir [1-3, 5].

Birbaryerli və ikibaryerli boşalmalarda baş verən elementar proseslərdə müxtəlif növ yüklü zərrəciklərin rolu boşalmanın parametrlərindən və xarici şəraitdən asılıdır. Araşdırdığımız baryer boşalmasının baş verdiyi yüksək təzyiqlərdə ionların sərbəst qaçış yolu kiçik olduğuna görə ionların temperaturu molekulların temperaturundan az fərqlənir və ionlar özlərini elə molekullar kimi aparır. Baxılan şəraitdə ionlar aktiv olmadığına görə yükötürmə prosesində əsas etibarlı ilə sərbəst elektronlar aktiv rol oynayır.

Araşdırma apardığımız işdə baryer boşalması plazmasında baş verən bütün elementar proseslər öyrənilmişdir. Xüsusən, sərbəst elektronların oksigen molekulları ilə qeyri-elastiki toqquşmalarına daha çox diqqət yetirilmişdir.

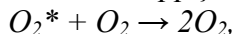
1. Sərbəst elektronların oksigen (O₂) molekulları ilə qeyri-elastiki

toqquşmaları aşağıdakı reaksiyalarla təsvir edilir:

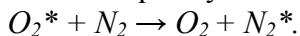


Burada * - işarəsi elektronla həyəcanlaşmış molekulu göstərilir.

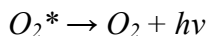
2. Reaksiya nəticəsində həyəcanlaşmış oksigen molekulları öz enerjilərini ya neytral oksigen molekulları ilə toqquşmalara:



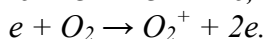
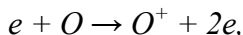
və ya digər elementin molekullarının rəqsi həyəcanlaşmasına sərf edə bilər:



Həyəcanlaşmış oksigen molekullarının dehəyəcanlaşma prosesi işə şüalanma ilə müşayiət oluna bilər:

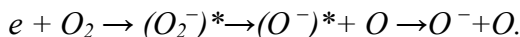


3. Neytral atomların və ya molekulların elektron zərbəsi ilə ionlaşması:



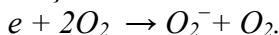
Sonuncu reaksiyanın effektiv kəsiyi qazların məlum kinetik kəsiyi ilə müqayisədə iki-üç tərtib yüksək olur.

4. Sərbəst elektronun oksigen molekulu tərəfindən dissosativ zəbt olunması:

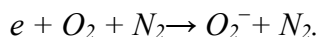


Həmin qeyri-elastiki toqquşma nəticəsində yaşama müddəti qısa olan həyəcanlaşmış ionlar yaranır [4]. Atomların nüvələri arasındakı məsafənin verilmiş qiymətində, əgər hərəkət edən elektronun enerjisi mənfi ionla molekul arasındakı potensiallar fərqi bərabərdirsə, onda elektron zəbt oluna bilər və proseslərin effektiv kəsiyi O_2 molekulunun kinetik kəsiyi tərtibində olur. Nəticədə, reaksiyalar nəticəsində (O^-) mənfi ionlar əmələ gəlir. Oksigen molekulu tərəfindən elektronun zəbt olunması reaksiyasının maksimal effektiv kəsiyi elektronun 6,7 eV enerjisində uyğun gəlir. Bu halda O_2 molekulunun dissosiasiyasına 5,1 eV enerji düşür.

Sərbəst elektronun zəbt olunması prosesi oksigen molekulunun dissosiasiya olunmamış halında baş verə bilər:

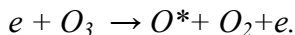
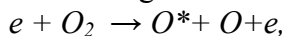


Bununla yanaşı, oksigen molekulu üç qat toqquşma nəticəsində də elektronu zəbt edə bilər:



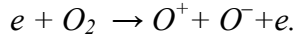
Baryer boşalması plazmasında mövcud olan ixtiyari zərrəcik üçüncü zərrəcik ola bilər. Plazmada həmin proseslərin baş vermə ehtimalı kifayət qədər yüksəkdir.

5. Sərbəst elektron zərbəsi ilə oksigen molekulunun dissosiasiyası:



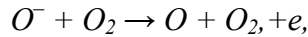
Sonuncu proseslərin effektiv kəsikləri qazların kinetik kəsiklərinə uyğundur: $\sigma = 10^{-15} \text{ cm}^2$.

Elektronların enerjisi 17 eV-u aşdıqda reaksiya nəticəsində oksigen ionları yaranır:



Nəzərə almalıyıq ki, O_2^- ionları adətən, oksigen molekulları enerjiləri 5 eV-dan kiçik olan elektronlarla toqquşduqda yaranır [4].

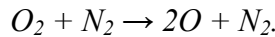
Elementar reaksiyalar nəticəsində mənfi yüklü oksigen ionlarının yaranması ilə yanaşı baryer plazmasında zərbə ionlaşması nəticəsində elektronların dissosiativ zəbt olunmasını və



reaksiyası nəticəsində yüksüzləşməsinə də nəzərə almaq lazımdır.

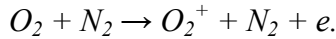
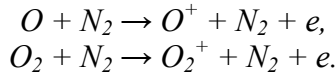
İndi də atomların, molekulların və ionların toqquşmaları nəticəsində baş verən elementar proseslərə baxaq. Müxtəlif növ elementar proseslərinin spektrindən, ancaq ozonun yaranmasında iştirak edən oksigen atomlarının, molekullarının və ionların spektrlərinə diqqət yetirək.

a) Oksigen molekulunun N_2 -azot molekulu ilə toqquşması nəticəsində dissosiasiyası:

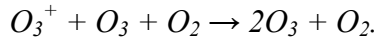
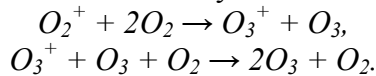


Bir oksigen molekuluna düşən orta dissosiasiya enerjisi 6 eV-a bərabərdir.

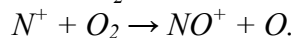
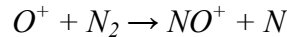
b) Azot molekulları ilə toqquşma nəticəsində oksigen atomunun və ya molekulunun ionlaşması:



c) oksigen molekulunun rekombinasiyası:

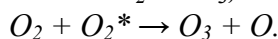
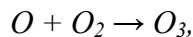


d) Müsbət ionlar və molekullar arasındakı rezonans yüksüzləşmə:

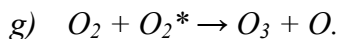


Qeyd edək ki, atomar ionun molekula çevrilməsinin xarakterik müddəti ($\approx 0,01 \div 10$ san), molekulyar ionların rekombinasiya müddətinə nisbətən daha tez baş verir.

e) Atom- molekul və ya molekul-molekul toqquşması:



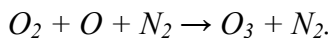
f) Qızma nəticəsində molekulun dissosiasiyası:



T = 2050 K temperaturunda $O_2 \rightarrow 2O + O$.

1 mola düşən istilik enerjisi $\chi = 2,8 \cdot 10^4$ C/mol-a bərabərdir. Sonuncu reaksiyadan görüldüyü kimi elektrik boşalmasında molekulun dissosiasiya etməsi üçün böyük enerji tələb olunur.

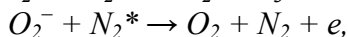
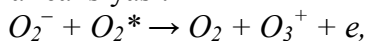
g) Üçqat toqquşma nəticəsində ozon molekulunun yaranması:



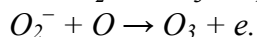
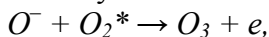
Baxılan reaksiya qazın yüksək temperaturlarında əks istiqamətdə gedə bilər.

Qeyd edək ki, mənfi oksigen ionlarının O atomları ilə və metastabil halda olan həyəcanlaşmış molekullarla toqquşmaları nəticəsində tərkibində oksigen olan qaz qarışıqları üçün endotermik parçalanmasının reaksiyasının effektiv kəsiyi çox yüksəkdir.

1) Birbaşa parçalanma reaksiyası:



2) Assosiativ parçalanma reaksiyası:



Beləliklə, oksigen molekullarının azot molekulunu və oksigen atomlarının O_2 molekulları ilə toqquşmasında ozonun yaranması proseslərində əsas rol oksigen molekullarının dissosiasiyası oynayır. Bundan başqa, üçqat toqquşma prosesində ozon molekullarının yaranmasını da nəzərə almaq lazımdır. Üç zərrəciyin iştirakı ilə baş verən elementar proseslərdə, əsasən, oksigenin atom və molekulları iştirak edir. Üçüncü zərrəcik əvəzinə isə qaz qarışığında olan ixtiyari yüklü zərrəcik iştirak edə bilər. Bir və iki baryerli boşalmalarda baş verən və yuxarıda araşdırılan elementar prosesləri ətraflı tədqiq etmədən parametrləri yaxşı olan ozon generatorlarını yaratmaq mümkün deyil.

ƏDƏBİYYAT

1. Davudov İ.B., Mamedov N.A., Davudov B.B. et.al. / Congress on Energy, Ecology, Economy, September 1997, - p.110-112.
2. Вольфович Ш.С., Геннадиевич С.А. Анализ электрического поля озонатора с бегущим барьерным разрядом в цилиндрической системе координат // Электротехнические комплексы и системы, Россия, - 2015, - № 4, - т. 11, - с. 5-11.
3. Мокиенко А.В., Петренко Н.Ф., Гоженко А.И. Гигиеническая оценка биоцидного действия озона при обеззараживании воды // Вода и экология: проблемы и решения, Россия, - 2015, - № 1, - с.19-25.
4. Лунин В.В., Попович М.П., Ткаченко С.Н. Физическая химия озона. - Москва: МГУ, - 2019, - 540 с.
5. Максимов А.И., Субботкина И.Н. Действие диафрагменного разряда и озона на раствор красителя активного ярко-красного 6С // Электронная обработка материалов, Россия, - Т. 49, - 2013, - № 3, - с. 58-62.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРОИСХОДЯЩИЕ В БАРЬЕРНОМ РАЗРЯДЕ

Б.Б.ДАВУДОВ, Т.Х.ГУСЕЙНОВ

РЕЗЮМЕ

Исследованы элементарные процессы, происходящие в барьерном разряде в воздухе. Установлено, что роль различных типов заряженных частиц в элементарных процессах, происходящих в барьерном разряде, зависит от параметров разряда и внешних условий. Максимальное эффективное сечение реакции неупругого столкновения электрона с молекулой кислорода происходит при энергии электрона 6,7 эВ. При этом на диссоциацию молекулы кислорода приходится 5,1 эВ энергии.

Ключевые слова: барьерный разряд, неупругие столкновения, элементарные процессы, возбужденная молекула, процесс диссоциативного захвата, процесс переноса заряда

ELEMENTARY PROCESSES OCCURING IN BARRIER DISCHARGE

B.B.DAVUDOV, T.Kh.GUSEINOV

SUMMARY

Elementary processes occurring in barrier discharges in air have been studied. It has been established that the role of various types of charged particles in elementary processes occurring in a barrier discharge depends on the discharge parameters and external conditions. The maximum effective cross section for the reaction of an inelastic collision of an electron with an oxygen molecule occurs at an electron energy of 6.7 eV. In this case, the dissociation of an oxygen molecule accounts for 5.1 eV of energy.

Keywords: barrier discharge, inelastic collisions, elementary processes, excited molecule, dissociative capture process, charge transfer process

UOT 538.958

**Cu₃In₅S₉ MONOKRİSTALINDA OPTİK UDMA VƏ
FOTOKEÇİRİCİLİYİN XÜSUSİYYƏTLƏRİ**

L.H.HƏSƏNOVA, Ə.Z.MƏHƏMMƏDOV

Bakı Dövlət Universiteti
ludmilahasanova@mail.ru

Cu₃In₅S₉ monokristalında müxtəlif temperaturalarda fotokeçiricilik və optik udma tədqiq olunmuş, udma əmsalının və fotokeçiriciliyin uzundalgalı sərhəddi təhlil olunaraq Urbax qaydasının yer aldığı göstərilmişdir.

Açar sözlər: Cu₃In₅S₉, spektral asılılıq, energetik parametrlər, izoabsorpsion əyrilər

Son illər $A^I B^{III} C_2^{VI} - B_2^{III} C_3^{VI}$ sisteminin təhlili bu sistemdə maraqlı fiziki xassələrə malik mürəkkəb yarımkeçirici birləşmələrin alındığı göstərilmişdir. Onlardan biri də Cu₃In₅S₉ birləşməsidir. Onun ərimə temperaturu 1083 °C olub, layvari quruluşa malikdir, asanlıqla güzgü səthinə malik laylara ayrılır. $D_{6h}^1 - (P6/mmm)$ fəza qrupuna daxil olan birləşmələrin qadağan olunmuş zonanın eni 1,45 eV-dur [1].

Baxılan işdə müxtəlif temperaturalarda Cu₃In₅S₉ monokristalında optik udma və fotokeçiricilik ölçülmüş, onlar arasında əlaqə araşdırılmışdır. [2] işində fotokeçiriciliyi ölçməklə α – udma əmsalının hesablanma bildiyi göstərilmişdir.

Yəni kifayət qalınlıqda nümunəyə şüalanma istiqamətində şüalanma müstəvisindən t_1 və t_2 məsafədə omik kontaktlar qoyulduqda (şəkil 1), yaranan I_f fotokeçiriciliyi nümunənin t_1 və t_2 aralığında udulan fotonların tam sayı ilə mütənasib olur:

$$I_f = C\alpha \int_{t_1}^{t_2} \exp(-\alpha y) dy = C[\exp(-\alpha t_1) - \exp(-\alpha t_2)], \quad (1)$$

burada, C – mütənasiblik əmsalı, α – udma əmsalıdır. α -ya görə differensiallama apardıqda (1) ifadəsinin maksimumu:

$$\alpha(t_2 - t_1) = \ln\left(\frac{t_2}{t_1}\right), \quad (2)$$

bu halda:

$$I_{f\max} = C\beta^\beta(v^v), \quad (3)$$

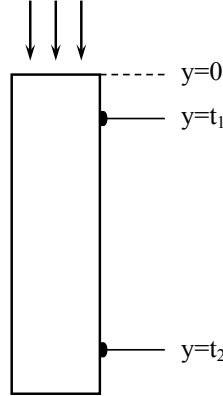
burada:

$$\beta = t_1(t_2 - t_1) \text{ v} \alpha Z = t_2(t_2 - t_1). \quad (4)$$

C-nin ifadəsini (1)-də yazdıqda:

$$\frac{I_f}{I_{f\max}} = \frac{[\exp(-\alpha t_1) - \exp(-\alpha t_2)]Z^z}{\beta^\beta}. \quad (5)$$

Bu ifadədə t_1 və t_2 (deməli β və Z) məlum olduğundan $I_{f\max}$ -u taparaq, I_f -i ölçmək olar.



Şək.1. Udma əmsalının kiçik qiymətlərində fotokeçiriciliyi müşahidə etmək üçün nümunə

$Cu_3In_5S_9$ birləşməsi layvari quruluşa malik olduğundan asanlıqla monolit birləşmədən, müxtəlif qalınlıqlı nümunələr kəsilib, qalınlıqları ölçüldükdən sonra Buger [3] düsturuna əsasən α hesablanır. Onun fotokeçiricilikdən hesablanmış və şəffaflığa görə hesablanmış qiymətləri çox az fərqlənir.

$Cu_3In_5S_9$ monokristalında 77 – 300 K temperatur intervalında udma əmsalı enerjiden ($\log\alpha \sim f(h\nu)$) xətti asılı olur ($\alpha \sim 30 - 6 \cdot 10^2 \text{ sm}^{-1}$). İlk dəfə Urbax [4] göstərmişdir ki, qələvi halloid kristallarda udmanın uzundalğalı sərhəddi fotonun tezliyinin eksponensial funksiyasıdır, yəni:

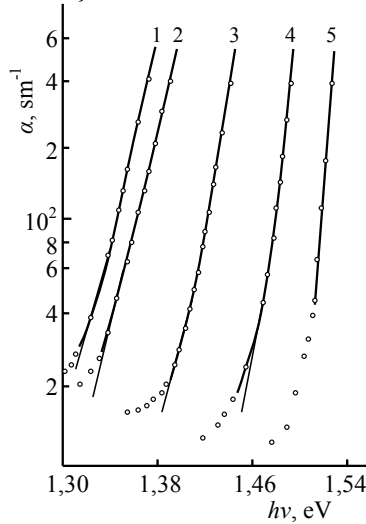
$$\alpha(v) = \alpha_0 \exp\left[\frac{\gamma(h\nu_0 - h\nu)}{kT}\right], \quad (6)$$

burada α_0 , ν_0 və γ – kristalı xarakterizə edən energetik parametrlər, γ/kT – verilmiş temperaturda yarımloqarifmik məşabəda $\alpha \sim hv$ asılılığına uyğun xəttin meylini göstərir. Urbax qaydası bir çox yarımkeçirici birləşmələrdə müxtəlif optik mexanizmlər üçün ödənilir [5, 6]. (6) ifadəsi eksiton-fonon qarşılıqlı təsiri üçün çıxarılmışdır, lakin o, elektron-fonon qarşılıqlı təsiri üçün də doğrudur [5, 6].

Şəkil 2-də $Cu_3In_5S_9$ monokristalında $\log\alpha$ -nın hv -dən asılılığı verilmişdir. Şəkildən görünür ki, udma əmsalı enerjiden eksponensial asılıdır və aşağı temperaturlarda uzundalğalı sərhəddə iki düzxətli hissə müşahidə olunur. Udma əmsalının böyük olduğu oblastda temperatur azaldıqca xətlərin meyli dəyişir və (6) ifadəsi ilə xarakterizə olunur. $Cu_3In_5S_9$ kristalı üçün α_0 və $h\nu_0$ uyğun olaraq 10^3 və 1,54 eV olur. Qeyd etmək lazımdır ki, γ temperaturdan asılıdır:

$$\gamma = \gamma_0 \frac{2kT}{h\nu_0} \ln \frac{h\nu_f}{2kT}, \quad (7)$$

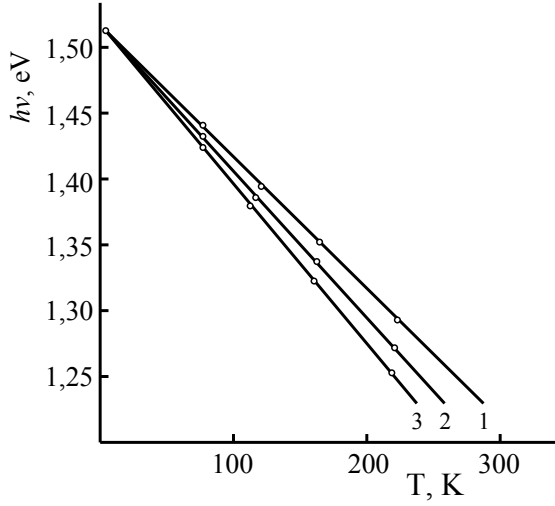
burada, γ_0 – temperaturdan asılı olmayan sabit, $h\nu_f$ – məxsusi udma sərhədinin formalaşmasında iştirak edən fononun enerjisidir.



Şəkil 2. $Cu_3In_5S_9$ monokristalında $\log\alpha$ -nın hv -dən asılılığı.

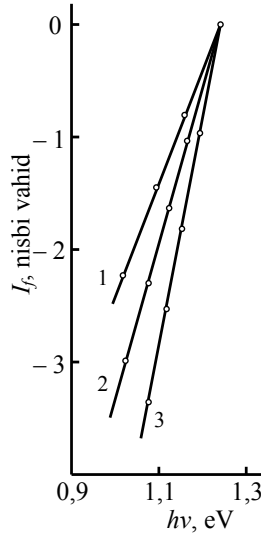
T, K: 1 – 290; 2 – 210; 3 – 158; 4 – 108; 5 – 80

γ -nın temperatur asılılığını (şəkil 3) (7) ifadəsindən hesablanmış qiyməti ilə müqayisəsindən γ_0 -in qiyməti hesablanmışdır ($\gamma_0=1,1$; $h\nu_f=10^{-2}$ eV).



Şəkil.3. $Cu_3In_5S_9$ monokristalının udma əmsalının “birinci” hissəsi üçün izoabsorbsion əyriyə. α , sm^{-1} : 1 – 500; 2 – 100; 3 – 50

Müxtəlif udma əmsallarının birinci hissələrinə uyğun izoabsorbsion əyriyə 1,58 eV-da bir nöqtədə toplanır (şəkil 4).



Şəkil.4. $Cu_3In_5S_9$ monokristalında fotokeçiriciliyin uzundalğalı sərhəddinin fotonun enerjisindən asılılığı

$Cu_3In_5S_9$ monokristalında enerjinin kiçik qiymətlərində udma əmsalı $\leq 100 sm^{-1}$ olur. Bu isə onu göstərir ki, düşən işıq nümunənin bütün həc-

mində bərabər udulur və səth rekombinasiyasını nəzərə almamaq olar. Onda təbii olaraq fərz etmək olar ki, fotocərəyanın kvantın enerjisindən asılılığı, udma əmsalının enerjidən asılılıq qanununa tabedir.

Ona görə (6) ifadəsini və şəkil 4-ü nəzərə alaraq demək olar ki, $Cu_3In_5S_9$ monokristalının uzundalğalı oblastunda fotokeçiriciliyin fotonun enerjisindən asılılığı:

$$I_f \sim \exp\left[-\frac{\gamma(h\nu_0 - h\nu)}{kT}\right],$$

düsturu ilə ifadə olunur.

$\ln I_f = f(h\nu)$ asılılığının meyli temperatur artdıqca azalır. Bu asılılıqdan $h\nu_0=1,18$ eV qiyməti tapılmışdır. Müxtəlif temperaturlarda γ -nın qiyməti hesablanmış və onun temperatur asılılığı qurulmuşdur, $T<300$ K-də temperatur artdıqca γ artır, $T\geq 300$ K oblastda isə γ -nın doyması müşahidə olunur. Belə asılılıq hiperbolik tangensoidlə yaxşı uyğunlaşır.

ƏDƏBİYYAT

1. Тагиров В.И., Гахраманов Н.Ф., Гусейнов А.Г. Новый класс тройных полупроводниковых соединений типа $A_3^I B_5^{III} C_9^{VI}$. – Баку: - 2001, - 303 с.
2. Мосс Т., Баррел Г., Элис Б. Полупроводниковая оптоэлектроника. – Москва: Мир, - 1976, - 431 с.
3. KazıMZadə A.H., Salmanov V.M., Salmanova A.A., Həsənova L.H. Yarımkeçirici opto və fotoelektronika. – Bakı: BDU, - 2012, - 282 с.
4. Urbach F. The long wavelength edge of photographic sensitivity and of the electronic absorption of solid. Phys. Rev., - 1953, - v. 92, - №5, - p.1324.
5. Гнатенко Ю.П., Курик В.М. Экспериментальные закономерности правила Урбаха в полупроводниках $A^{III}B^{VI}$. ФТП, - 1971, - т. 5, - № 7, - с. 1347-1350.
6. Коган В.Д. Теория длинноволнового края поглощения света в полупроводниках и диэлектриках. ФТТ, - 1975, - т. 17, - № 9, - с. 2578-2584.

ОСОБЕННОСТИ ОПТИЧЕСКОГО ПОГЛОЩЕНИЯ И ФОТОПРОВОДИМОСТИ В МОНОКРИСТАЛЕ $Cu_3In_5S_9$

Л.Г.ГАСАНОВА, А.З.МАГОМЕДОВ

РЕЗЮМЕ

Исследованы фотопроводимость и оптическое поглощение при различных температурах в монокристалле $Cu_3In_5S_9$, проанализированы коэффициент поглощения и длинноволновый край фотопроводимости и показано что, имеет место правила Урбаха.

Ключевые слова: $Cu_3In_5S_9$, спектральная зависимость, энергетические параметры, изобсорбционные кривые

**FEATURES OF OPTICAL ABSORPTION AND PHOTOCONDUCTIVITY
IN $\text{Cu}_3\text{In}_5\text{S}_9$ SINGLE CRYSTAL**

L.G.HASANOVA, A.Z.MAHAMMADOV

SUMMARY

Photoconductivity and optical absorption at different temperatures in $\text{Cu}_3\text{In}_5\text{S}_9$ single crystal have been studied, the absorption coefficient and the long-wavelength edge of photoconductivity have been analyzed, and it has been shown that Urbach rules apply.

Keywords: $\text{Cu}_3\text{In}_5\text{S}_9$, spectral dependence, energy parameters, isoabsorption curves

УДК 621.382

ДВУХМЕРНАЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА ДИОДОВ ШОТТКИ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ПОЛЕМ**Р.К.МАМЕДОВ, А.Р.АСЛАНОВА****Бакинский Государственный Университет
rasimaz50@yahoo.com**

Реальные ДШ с ДЭП описываются двухмерной энергетической структурой и может быть представлены как одномерная двухбарьерная энергетическая структура. Высота барьера вдоль ширины контакта остается постоянной Φ_{B1} на внутренней части и далее уменьшается до величины Φ_{B2} на краевой части контакта. С ростом температуры от 100 до 320K высоты барьера Φ_{B1} и Φ_{B2} Au/Ag – nGaAs ДШ увеличиваются, а их разность остается постоянной около 300 мэВ, линейно уменьшаются напряжение U_C ДЭП от 0,65 до 0,13В и коэффициент идеальности n от 2,13 до 1,12. При отсутствии напряжения ($U=0$), в цепи возникает ток ($5 \cdot 10^{-10}$ - $2 \cdot 10^{-9}$ А), который увеличивается с ростом температуры. Между параметрами Φ_{B2} , n и U_C существует корреляция. Экспериментальные результаты интерпретируются предложенной формулой ВАХ.

Ключевые слова: контакт металл-полупроводник, двухмерная структура, контакт Шоттки, электрическое поле, дополнительное электрическое поле, диоды Шоттки.

Развитие современной измерительной техники, особенно, сканирующей зондовой микроскопии (СЗМ), способствовало установлению некоторых важных особенностей электронных процессов, происходящих в реальных выпрямляющих контактах метал-полупроводник (КМП), т.е. диодах Шоттки (ДШ). При использовании СЗМ методы в исследованиях было непосредственно обнаружено возникновение дополнительного электрического поля (ДЭП) [1] в приконтактной области ДШ, которое внесло значительный вклад в понимании многих особенностей реальных ДШ, трудно интерпретируемых с помощью теории идеальных контактов [2-5]. ДЭП, возникающее за счет разности потенциалов между поверхностью границы раздела и к ней примыкающими свободными поверхностями контактирующих материалов, существует практически во всех реальных КМП. К сожалению, влияние

ДЭП на свойства ДШ все еще мало изучено.

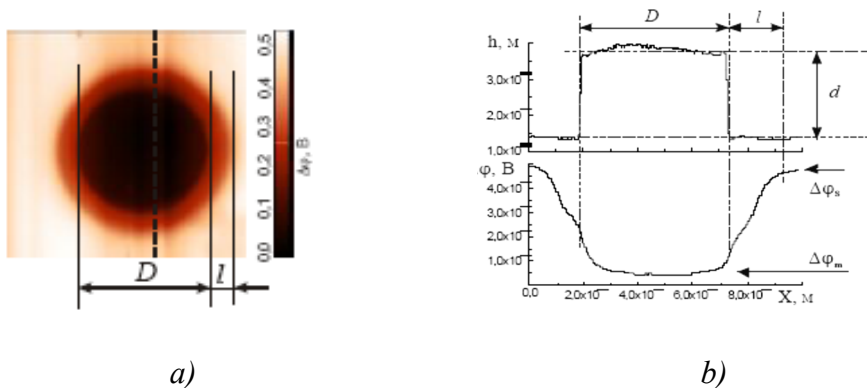


Рис. 1. АСМ изображения двумерного (а) и одномерного (б) распределения потенциала на поверхности Au-nGaAs контакта с диаметром $D=50$ мкм.

Многие особенности возникновения ДЭП в КМП, обнаруженные с помощью АСМ методов подробно изложены в [3]. Результаты АСМ исследований Au-nGaAs контакта Шоттки с диаметром 50 мкм представлены на рис.1 [3], где хорошо видно четкое изображение рельефа металла Au на поверхности nGaAs пластинки, двумерное распределение поверхностного потенциала вдоль поверхности контакта (а) и профили (б) поперечных сечений металла и поверхностного потенциала по пунктирным линиям. Из АСМ изображений видно, что круглый металлический (Au) электрод с диаметром D на поверхности nGaAs полупроводниковой пластинки имеет четкий круглый край. Под действием ДЭП вокруг контакта на поверхности полупроводника образуется переходная область (ареоле) с шириной (l) (рис.1а) и значение потенциала ($\Delta\phi$) вдоль ширины ареола увеличивается от потенциала металла с толщиной h до потенциала свободной поверхности полупроводника (рис.1б).

ДЭП вокруг контакта распространяется как на свободных поверхностях металла и полупроводника, так и в приповерхностных и приконтактных областях полупроводника. ДЭП проникает в глубь полупроводника n-типа и охватывает краевую приконтактную область широких контактов и всю приконтактную область узких КМП. Под действием ДЭП с напряженностью E_A , направленное от краевой контактной поверхности металла к свободной поверхности полупроводника через приконтактную область полупроводника происходит перераспределение зарядов и образуются область пространственных зарядов (ОПЗ) с напряженностью электрического поля E_l . В результате суперпозиции электрических полей с напряженностями E_A и E_l формируется

результатирующее электрическое поле (РЭП) с напряженностью E_r в ОПЗ. Зависимость E_r от расстояния x изображается кривой линией, где она вблизи границы раздела имеет низкое значение и на достаточно большом расстоянии от нее достигает максимума. В результате чего, металл и полупроводник в глубине ОПЗ приобретают потенциалы φ_m и φ_s , а ДШ под действием возникающего падения напряжения ($-U_C$) ДЭП становится в неравновесном состоянии, где: $U_C = \varphi_s - \varphi_m$. При замыкании проводом двух концов ДШ в цепи протекает электрический ток [6-8].

Таким образом, электрические свойства реальных ДШ определяются свойствами как РЕП краевой части, так и ОПЗ внутренней части приконтактной области полупроводника, на основе которых формируется двухмерная энергетическая структура контакта, представленная в данной работе.

Двухмерная энергетическая структура реальных ДШ

ДЕП в реальных ДШ, возникающие за счет разности потенциалов между контактной поверхностью и свободных поверхностей контактирующих материалов, проникает в полупроводник и прикрывает краевые поверхности (границу раздела) контактирующего металла и свободной поверхности полупроводника вокруг контакта. Ширина прикрытой с ДЭП поверхности металла становится меньше от ширины прикрытой с ДЭП свободной поверхности полупроводника. Глубина проникновения ДЭП в полупроводник вдоль периферии контакта имеет достаточно большое значение. В противоположных перпендикулярных направлениях от периферийной линии контакта ДЭП уменьшается до нуля на краях прикрытых поверхностей. Поэтому, в формировании энергетической структуры реальных ДШ активно участвуют обе особенности распространения ДЭП по ширине и по глубине в приконтактной области полупроводника [7].

На рис.2 представлена схематическая двухмерная энергетическая структура выпрямляющего контакта металл – полупроводник (КМП) при отсутствии внешнего напряжения. В ДШ с шириной контакта l , изготовленном на основе контакта металла с работой выхода Φ_M и n -типа полупроводника с работой выхода Φ_S (электронным средством χ), где $\Phi_M > \Phi_S$, возникает ДЭП, которое охватывает обе краевые поверхности с шириной l_2 и отсутствует на внутренней поверхности с шириной l_1 контакта. Согласно модели Шоттки [9,10], на внутренней части с шириной l_1 контакта образуется потенциальный барьер, высота кото-

рого под действием силы изображения уменьшается на величину $\Delta\Phi_{B1}$ и становится равной Φ_{B1} (где $\Phi_{B1} = \Phi_M - \chi$) на расстоянии x_1 от поверхности границы раздела (плоскость P) и область пространственных зарядов (ОПЗ) с шириной d_1 .

На двух краевых частях с шириной l_2 контактной поверхности образуется потенциальный барьер с учетом двух особенностей ДЭП, направленного от контактной поверхности металла к свободным поверхностям контактирующих материалов через ОПЗ. При этом образуется потенциальный барьер, высота которого снижается от Φ_{B1} до величины Φ_{B2} вдоль ширины l_2 и расстояние максимума барьера увеличивается от x_1 до x_2 на крае контакта. Свободные электроны в области распространения ДЭП, охватывающей приповерхностный регион полупроводника накапливаются на контактной поверхности металла, следовательно, образуются ОПЗ с максимальной шириной d_2 и напряжение ДЭП ($-U_C$) вдоль края контакта. Под действием напряжения ДЭП краевая часть с шириной l_2 контакта не находится в равновесном состоянии и вдоль периферии контакта уровень Ферми E_{FS} полупроводника находится ниже на величину ($-eU_C$) от уровень Ферми F_{SO} .

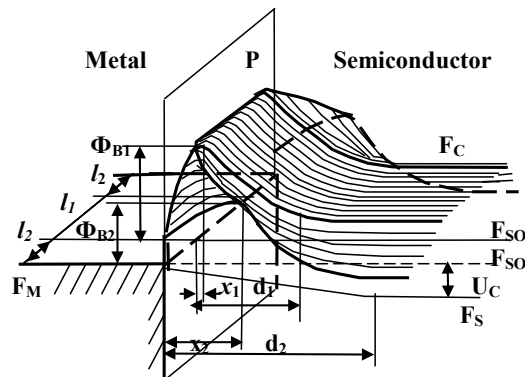


Рис. 2. Схематическая двумерная энергетическая структура реальных диодов Шоттки при отсутствии внешнего напряжения.

Из рис.2 видно, что место положения максимума высоты потенциального барьера, как основного энергетического параметра, в регионе ОПЗ краевой части с шириной l_2 ДШ характеризуется как расстоянием (x) в направлении от границы раздела вглубь полупроводника, так расстоянием (y) в направлении от края вдоль ширины границы раздела. Она в регионе ОПЗ внутренней части с шириной l_1 ДШ характеризуется лишь расстоянием (x) в направлении от границы раздела вглубь полупроводника. Таким образом, точки максимумов высот потенциальных барьеров в регионе ОПЗ ДШ по ширине контакта изоб-

ражают кривую линию ($\Phi_{B2} \dots \Phi_{B1} \dots \Phi_{B2}$) и кривизна этой кривой линии определяется геометрической формой периферии контактной поверхности.

При замыкании проводом двух концов ДШ под действием отрицательного напряжения ($-U_C$) ДЭП в цепи может протекать электрический ток через краевую часть с площадью S_2 и высотой потенциального барьера Φ_{B2} , который согласно теории термоэлектронной эмиссии определяется формулой [8]:

$$I_{20} = S_2 A T^2 \exp\left(-\frac{\Phi_{B2}}{kT}\right) \left[\exp\left(-\frac{qU_C}{kT}\right) - 1 \right] \quad (1)$$

Все обозначение являются общепризнанными.

Двухбарьерная энергетическая структура и токопрохождение

Фактическая энергетическая двумерная структура реальных ДШ имеет достаточно сложный характер. В первом приближении, она может быть представлена как упрощенная двухбарьерная энергетическая структура в одномерной координатной системе вдоль линии (x), перпендикулярной к границе раздела. При этом, учитывается, что высота потенциального барьера Φ_{B10} внутренней части контакта под действием силы изображения уменьшается на величину $\Delta\Phi_{B1}$, становится постоянной Φ_{B1} вдоль ширины l_1 внутренней части и далее уменьшается (пунктирная линия) до величины Φ_{B2} вдоль ширины l_2 краевой части контакта (рис.2). Максимумы Φ_{B1} и Φ_{B2} находятся на расстояниях x_1 и x_2 от контактной поверхности металла и ширины ОПЗ внутренней и краевой части составляют d_1 и d_2 , соответственно (где, $x_1 \ll x_2$ и $d_1 < d_2$). Краевая часть ДШ находится под напряжением ($-U_C$) ДЭП и его схематическая двухбарьерная энергетическая структура изображается так, как это показано на рис.3:

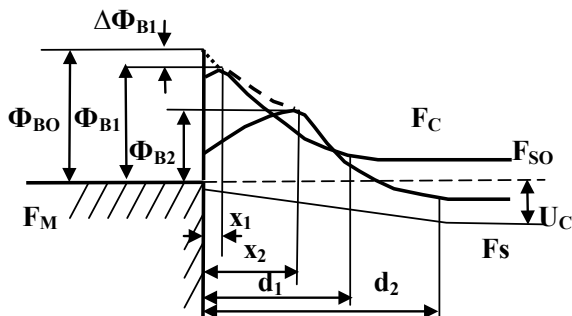


Рис.3. Схематическая двухбарьерная энергетическая структура реальных диодов Шоттки при отсутствии внешнего напряжения.

При приложении внешнего напряжения к ДШ в прямом ($U>0$) и обратном ($U<0$) направлениях, общий ток, протекающий через ДШ определяется суммой токов внутренней I_1 и краевой I_2 частей контакта, которые согласно теории термоэлектронной эмиссии с учетом более вероятные зависимости между высотами потенциальных барьеров и приложенным U внешним напряжением, выражаются следующими формулами [8]:

$$I_1 = S_1 AT^2 \exp\left(-\frac{\Phi_{B1} + q\beta_1 U}{kT}\right) \left[\exp\left(\frac{qU}{kT}\right) - 1 \right] \quad (2)$$

$$I_2 = S_2 AT^2 \exp\left(-\frac{\Phi_{B2} + q\beta_2 U}{kT}\right) \left[\exp\left(\frac{q(U - U_C)}{kT}\right) - 1 \right] \quad (3)$$

После проведения элементарных математических преобразований в (2) и (3) с учетом коэффициентов идеальности (n_1, n_2) и (n_{r1}, n_{r2}), для ВАХ ДШ в прямом ($U>0$) и обратном ($U<0$) направлениях получается следующая формула:

$$I = I_1 + I_2 = S_1 AT^2 \exp\left(-\frac{\Phi_{B1}}{kT}\right) \left[\exp\left(\frac{qU}{n_1 kT}\right) - \exp\left(-\frac{qU}{n_{r1} kT}\right) \right] + \quad (4)$$

$$+ S_2 AT^2 \exp\left(-\frac{\Phi_{B2}}{kT}\right) \left[\exp\left(\frac{q(U - n_2 U_C)}{n_2 kT}\right) - \exp\left(-\frac{qU}{n_{r2} kT}\right) \right]$$

где, между коэффициентами n_1, n_{r1}, n_2, n_{r2} и коэффициентами пропорциональности β_1, β_2 имеются следующие связи:

$$n_1 = 1/(1 - \beta_1) \quad \text{и} \quad n_{r1} = 1/\beta_1 \quad (5)$$

$$n_2 = 1/(1 - \beta_2) \quad \text{и} \quad n_{r2} = 1/\beta_2 \quad (6)$$

Из изложенного выше следует, что особенности прямой и обратной ветвей ВАХ реальных ДШ определяются в основном численными значениями $S_1, S_2, \Phi_{B1}, \Phi_{B2}, U_C$ и характерами зависимостей $\Delta\Phi_{B1} = q\beta_1 U$ и $\Delta\Phi_{B2} = q\beta_2 U$, соответственно. При отсутствии приложенного напряжения ($U=0$) в замкнутой цепи ДШ под действием U_C ДЭП возникает электрический ток в обратном направлении, который определяется формулой (1). При приложении напряжения в прямом направлении, равного по модулю напряжению ДЭП ($U = \pm U_C$), обратный ток прекращается течь через краевую часть с S_2 контакта. При дальнейшем увеличении напряжения ($U > \pm U_C$) через обе части с Φ_{B1} и Φ_{B2} контакта токи начинают протекать в прямом направлении. ДШ с

общей площадью S контакта имеет действующую высоту потенциального барьера и определенные коэффициент идеальности и безразмерный коэффициент. При приложении обратного напряжения ($U < 0$) к ДШ ток общего контакта определяется суммой токов внутренней и краевой частей контакта.

Результаты измерений и их обсуждения

Выше представленные двухбарьерная энергетическая структура и механизмы токопрохождения в ДШ находятся в хорошем согласии с результатами экспериментальных измерений [11-15]. Большой интерес представляют результаты измерений ВАХ в широком интервале температур (100 – 320К) ДШ с диаметром 1000 мкм, изготовленных на основе контакта сплава (Au+Ag) с поверхностью полупроводниковой пластинки nGaAs [11], представленные на рис.4а.

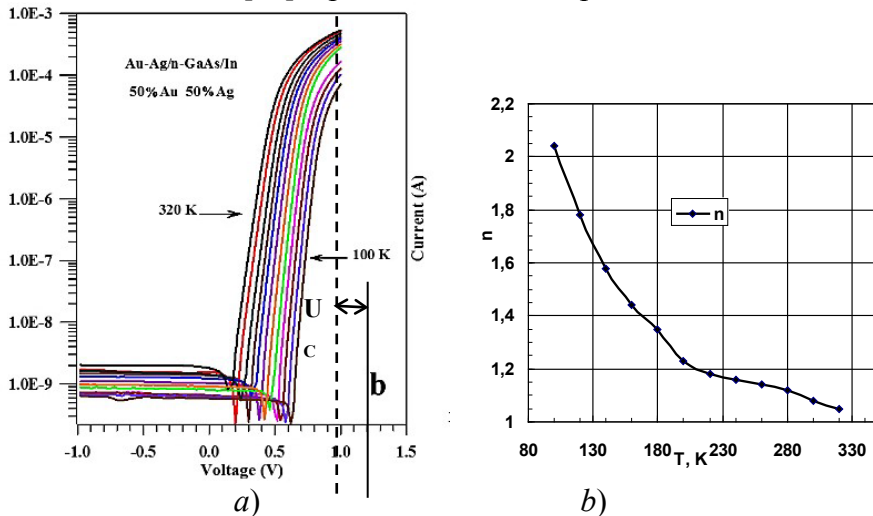


Рис.4. а) Вольтамперные характеристики (Au+Ag) – nGaAs ДШ в интервале температур (100 -320)К. б) Температурная зависимость коэффициента идеальности ДШ.

Из рис.4а видно, что прямые и обратные ветви ВАХ (Au+Ag) – nGaAs ДШ в широком интервале температур имеют нормальный характер и прямые ветви ВАХ ДШ под действием ДЭП смещаются вдоль оси напряжения на величину U_C . При отсутствии приложенного напряжения ($U=0$), в цепи под действием U_C возникает ток, который увеличивается от $5 \cdot 10^{-10}$ до $2 \cdot 10^{-9}$ А с увеличением температуры от 100 до 320 К. При этом величина U_C линейно уменьшается от 0,65 до 0,13В (рис.5), и также уменьшается коэффициент идеальности от 2,13 до 1,12 (рис.4б). Из одинакового характера температурных зависимостей параметров U_C и n следует, что между ними существует определенная корреляция.

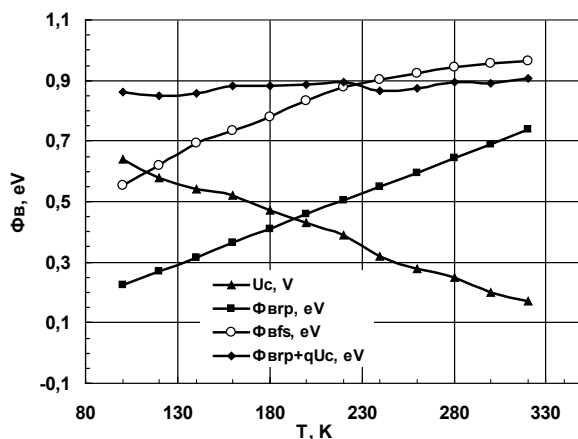


Рис.5. Температурные зависимости высоты потенциальных барьеров (Au+Ag) – nGaAs ДШ в прямом Φ_{Bfs} и обратном Φ_{Brp} (Φ_{Brp}) направлениях, напряжении U_C ДЭП и суммы Φ_{Brp} и U_C .

Были вычислены высоты потенциальных барьеров (Au+Ag) – nGaAs ДШ в прямом Φ_{Bfs} (по S общей площади) и обратном Φ_{Brp} (по S_p краевой площади шириной 2 мкм) направлениях стандартными ВАХ методами с использованием токов насыщения, полученных путем экстраполяции линейных участков прямых и обратных ветвей ВАХ в полупологарифмическом масштабе (рис.4а). Их температурные зависимости в интервале (100 – 320) К представлены на рис.5. Там же показаны температурные зависимости напряжения U_C ДЭП и суммы значений высоты барьера в обратном направлении Φ_{Brp} и напряжении U_C . Из этой рисунки следует, что действующая высота барьера ДШ в прямом направлении значительно превышает высоту барьера в обратном направлении и они почти линейно увеличиваются с увеличением температуры от 100 до 320 К и при этом разница между ними остается постоянной и равной на около 300 мэВ. С увеличением температуры от 100 до 320 К высота барьера в обратном направлении Φ_{Brp} линейно увеличивается и напряжении U_C линейно уменьшается, а сумма ($\Phi_{Brp} + U_C$) остается постоянной. Это означает, что уменьшение Φ_{Brp} сопровождается увеличением напряжения U_C ДЭП.

Заключение

Фактическая двумерная энергетическая структура реальных ДШ с ДЭП, в первом приближении, может быть представлена как двухбарьерная энергетическая структура в одномерной координатной системе вдоль линии, перпендикулярной к границе раздела. Высота

потенциального барьера ДШ вдоль ширины внутренней части контакта остается постоянной Φ_{B1} и далее вдоль ширины краевой части контакта уменьшается до величины Φ_{B2} . Максимумы Φ_{B1} и Φ_{B2} находятся на различных расстояниях от контактной поверхности металла и краевая часть контакта находится под напряжением ($-U_C$) ДЭП. Разность Φ_{B1} и Φ_{B2} для Au/Ag – nGaAs ДШ с диаметром 1000 мкм составляет около 300 мэВ. С ростом температуры от 100 до 320К Φ_{B1} и Φ_{B2} увеличиваются, а их разность почти не меняется, величина U_C линейно уменьшается от 0,65 до 0,13В, и уменьшается коэффициент идеальности от 2,13 до 1,12. При отсутствии приложенного напряжения ($U=0$), в цепи возникает ток под действием U_C , который увеличивается от $5 \cdot 10^{-10}$ до $2 \cdot 10^{-9}$ А с ростом температуры. Из идентичности характеров температурных зависимостей параметров U_C и n следует существование определенной корреляции между ними. Результаты экспериментальных измерений хорошо интерпретируются аналитической формулой ВАХ, полученной на основе двухмерной энергетической структуры ДШ

ЛИТЕРАТУРА

1. Мамедов Р.К. Контакты металл – полупроводник с электрическим полем пятен. – Баку: БГУ, - 2003, - 231 с.
2. Торхов Н.А. Влияние фотоэда на токопрохождение в контактах металл – полупроводник с барьером Шоттки. ФТП, - 2011, - т.45, - в.7, - с.965–973
3. Торхов Н.А. Влияние периферии контактов металл – полупроводник с барьером Шоттки на их электрофизические характеристики. ФТП, - 2011, - т.45, - в.1, - с.70-86.
4. Torkhov N.A., The influence of the peripheral electrostatic field on the valve photoelectric effect in metal-semiconductor contacts with a Schottky barrier, Physics and Technology of Semiconductors, - 52 (10) (2018) 1150-1171
5. Торхов Н.А., Новиков В.А. Исследование электростатической системы поверхности кристаллов AuNi/GaN диодов Шоттки методом зонда Кельвина атомно-силовой микроскопии, ФТП, - 2020, - т.54, - в. 3, - с.266-274
6. Mamedov R.K., Aslanova A.R., Alternativ current source based Schottky contact with additional electric field, Superlattices and Microstructures, - 107 (2017) 28–37.
7. Mamedov R.K., Aslanova A.R. Features of current-voltage characteristic of nonequilibrium trench MOS barrier Schottky diode, Superlattices and Microstructures, - 118 (2018) 298–307.
8. Mamedov R.K., Aslanova A.R. Features of current transport in Schottky diodes with additional electric field, Superlattices and Microstructures, - 136 (2019) 106297.
9. Зи С.М. Физика полупроводниковых приборов, часть 1. – Москва: Мир, - 1984, - 450 с.
10. Roderick E.H, Williams R.H. Metal-Semiconductor Contacts. 2nd edn. - Oxford: Clarendon Press, - 1988.
11. S. Küp, A. Taşer, İ. Kanmaz, B. et. al., Effects of Au-Ag and Au-Cu alloy ratios on the temperature dependent current-voltage characteristics of Au-Ag/n-GaAs/In and Au-Cu/n-GaAs/In Schottky diodes, Materials Today: Proceedings 18 (2019) 1936–1945.
12. Caixia Hou , Robert A. Makin , Krystal R. York et. al., High-temperature (350 °C)

- oxidized iridium Schottky contacts on β -Ga₂O₃, Appl. Phys. Lett. 114 (2019) 233503.
13. Jiancheng Yang, Chaker Fares, Fan Ren et. al., Switching Behavior and Forward Bias Degradation of 700V, 0.2A, β -Ga₂O₃ Vertical Geometry Rectifiers, ECS Journal of Solid State Science and Technology, 8 (7) (2019)Q3028-Q3033.
14. Chandan Joishi, Subrina Rafique, Zhanbo Xia1 et al, Low-pressure CVD-grown β -Ga₂O₃ bevel-field-plated Schottky barrier diodes Applied Physics Express 11, (2018) 031101.

ƏLAVƏ ELEKTRİK SAHƏLİ ŞOTTKI DİODLARININ İKİÖLÇÜLÜ ENERJETİK QURULUŞU

R.Q.MƏMMƏDOV, Ə.R.ASLANOVA

XÜLASƏ

ƏES-li real ŞD-lər ikiölçülü energetik quruluşla təsvir olunur və ikiçəpərli energetik quruluş kimi təqdim oluna bilər. Potensial çəpərin hündürlüyü kontakt eni boyunca orta hissədə sabit Φ_{B1} olur və sonra kontaktın kənar hissəsində Φ_{B2} -yə qədər azalır. Temperatur 100-dən 320 K-nə qədər artdıqda Au/Ag – nGaAs ŞD-nin Φ_{B1} və Φ_{B2} çəpər hündürlükləri artır, onlar arasındakı fərq dəyişməz olaraq 300 meV qalır. ƏES-nin U_C gərginliyi 0,65-dən 0,13V-yə və ideallıq əmsali n 2,13 –dən 1,12-yə qədər azalır. Xarici gərginlik olmadıqda ($U=0$) dövrədə elektrik cərəyanı ($5 \cdot 10^{-10}$ - $2 \cdot 10^{-9}$ A) yaranır və o temperatur artdıqca artır. Φ_{B2} , n və U_C parametrləri arasında korrelyasiya mövcuddur. Təcrübə nəticələri təqdim olunan VAX düsturu ilə izah olunur.

Açar sözlər: metal – yarımkəçirici kontakt, ikiölçülü quruluş, Şottki kontaktı, elektrik sahəsi, əlavə elektrik sahəsi, Şottki diodu

TWO-DIMENSIONAL ENERGY STRUCTURE OF SCHOTTKY DIODES WITH AN ADDITIONAL ELECTRIC FIELD

R.K.MAMEDOV, A.R.ASLANOVA

SUMMARY

Real SD with AEF are described by a two-dimensional energy structure and can be represented as a one-dimensional two-barrier energy structure. The potential barrier height of the along the width of the contact remains constant Φ_{B1} on the inner part and then decreases to the value Φ_{B2} on the edge part of the contact. With an increase in temperature from 100 to 320 K, the barrier heights Φ_{B1} and Φ_{B2} Au/Ag – nGaAs SD increase, and their difference remains constant about 300 meV, the voltage U_C of the AEF decreases linearly from 0.65 to 0.13 V and the ideality coefficient n from 2.13 to 1.12. In the absence of voltage ($U=0$), a current appears in the circuit ($5 \cdot 10^{-10}$ - $2 \cdot 10^{-9}$ A), which increases with increasing temperature. There is a correlation between the parameters Φ_{B2} , n and U_C . The experimental results are interpreted by the proposed formula for the I-V characteristic.

Keywords: metal-semiconductor contact, two-dimensional structure, Schottky contact, electric field, additional electric field, Schottky diode

УДК 577.3

**ИССЛЕДОВАНИЕ КОНФОРМАЦИОННЫХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ
АНАЛОГОВ ПЕНТАПЕПТИДНОЙ МОЛЕКУЛЫ****Г.Д.АББАСОВА, Э.З.АЛИЕВ****Бакинский Государственный Университет
abbasova1962@mail.ru**

Методом молекулярной механики в приближении атом-атомных потенциальных функций изучено влияние замен аминокислотных остатков в первичной структуре пептида CREKA на структуру и конформационные свойства его аналогов.

Ключевые слова: пептид CREKA, аналог, конформационный анализ, структура, конформационная подвижность.

Введение. Сегодня успехи в теоретическом исследовании строения и свойств пептидных молекул связаны с наличием и доступностью многочисленных вычислительных программ, основанных на различных приближениях методов молекулярной механики, на эмпирических и полуэмпирических приближениях методов квантовой химии и др. [1-3]. Результаты, полученные с помощью этих методов, в ряде случаев, не уступают данным экспериментальных исследований. В то же время, они в большинстве случаев являются необходимым дополнением для интерпретации данных эксперимента. К таким методам исследования относится и метод теоретического конформационного анализа, основанный на физической модели атома и использующий полуэмпирические потенциальные функции для описания структуры, конформационных свойств и реакционной способности пептидов и белков [4,5]. В данной работе методом теоретического конформационного анализа исследованы конформационные свойства аналогов пептидной молекулы, обладающей ярко выраженным противоопухолевым эффектом против рака простаты. Пептид, состоящий из пяти аминокислотных остатков Cys1-Arg2-Glu3-Lys4-Ala5 (далее, пептид CREKA), был впервые синтезирован в 2006 году и впоследствии стал объектом при-

стального внимания различных исследователей благодаря своей уникальной способности накапливаться в высоких концентрациях вблизи опухолевых клеток в различных органах и тканях [6-8]. Ранее нами были исследованы структура и конформационная подвижность молекулы CREKA, изучены динамические особенности основной и боковых цепей аминокислотных остатков, входящих в структуру пептида [9]. В литературе описаны многочисленные химические модификации пептида CREKA, осуществленные с целью получения более эффективных аналогов молекулы.

В данной работе с целью изучения влияния замен аминокислотных остатков на пространственную структуру и конформационные свойства молекулы CREKA, были исследованы 17 модифицированных аналогов природного пептида. Сопоставление стабильных конформаций и анализ результатов исследований по конформационной подвижности позволили выявить общие элементы пространственной организации аналогов CREKA. Полученные результаты могут служить основой для установления взаимосвязи между структурой и функцией CREKA, а, следовательно, и базой для синтеза высокоэффективных аналогов противоопухолевых соединений с пролонгированным эффектом действия.

Методы расчета

Исследование пространственного строения и конформационной подвижности аналогов пентапептидной молекулы CREKA проводилось методом теоретического конформационного анализа по методике, подробно изложенной в работах [4,5]. При конформационном расчете использовали полуэмпирические потенциальные функции, описывающие невалентные, электростатические взаимодействия атомов, торсионную энергию и энергию образования водородных связей [5]. В качестве начальных приближений при минимизации стартовых структур пептидов использованы значения двугранных углов, соответствующие низкоэнергетическим состояниям монопептидов [4,5]. Минимизацию энергии проводили методом сопряженных градиентов при фиксированных значениях длин связей и валентных углов. К числу варьируемых параметров относятся двугранные углы основной (ϕ , ψ , ω) и боковых цепей (χ_1 , χ_2 , χ_3, \dots) составляющих молекулу аминокислотных остатков.

Результаты и обсуждение

В табл.1 приведена последовательность аминокислотных остат-

ков природного пептида CREKA и его 17 модифицированных аналогов. В линейной последовательности пептида CREKA последовательно было проведено ряд замен: остаток Cys1 заменялся на аланин или серин; аргинин во втором положении-на пролин или лизин; Glu3 на аспарагиновую кислоту; Lys4 на положительно заряженную аминокислоту аргинин; а Ala5 был заменен в ряде аналогов на неполярную аминокислоту валин (табл.1).

Таблица 1

Пептид CREKA и его аналоги

Пептид CREKA и его аналоги	Аминокислотная последовательность
CREKA	Cys1-Arg2-Glu3-Lys4-Ala5
AREKA	Ala1 -Arg2-Glu3-Lys4-Ala5
CPEKA	Cys1- Pro2 -Glu3-Lys4-Ala5
CKERA	Cys1- Lys2 -Glu3- Arg4 -Ala5
CRERA	Cys1-Arg2-Glu3- Arg4 -Ala5
SREKA	Ser1 -Arg2-Glu3-Lys4-Ala5
CKEKA	Cys1- Lys2 -Glu3-Lys4-Ala5
CRDKA	Cys1-Arg2- Asp3 -Lys4-Ala5
CREKV	Cys1-Arg2-Glu3-Lys4- Val5
SKEKA	Ser1 - Lys2 -Glu3-Lys4-Ala5
SRDKA	Ser1 -Arg2- Asp3 -Lys4-Ala5
SRERA	Ser1 -Arg2-Glu3- Arg4 -Ala5
SREKV	Ser1 -Arg2-Glu3-Lys4- Val5
CKDKA	Cys1- Lys2 - Asp3 -Lys4-Ala5
CKEKV	Cys1- Lys2 -Glu3-Lys4- Val5
CRDRA	Cys1-Arg2- Asp3 - Arg4 -Ala5
CRDKV	Cys1-Arg2- Asp3 -Lys4- Val5
CRERV	Cys1-Arg2-Glu3- Arg4 - Val5

Как следует из результатов расчета, наименьшим значением полной конформационной энергии обладает аналог CRERA с $E_{\text{полн}} = -14.5$ ккал/моль. Аналог CRERA, который содержит остаток лизина вместо аргинина в четвертом положении пептидной цепи (Lys4 → Arg4), характеризуется наличием фрагмента Cys1-Glu3 со свернутой структурой во всех низкоэнергетических конформационных состояниях. Основной вклад в стабилизацию структуры пептида вносят невалентные взаимодействия, а также водородные связи между атомами боковых цепей Arg2 и Glu3. Такой же поворот пептидной цепи на участке Cys1-Glu3 характерен для аналога CPEKA, в котором выполнена замена одной из полярных аминокислот на неполярную Arg2 → Pro2 ($E_{\text{отн}} = 5.0$ ккал/моль). Замена цистеина Cys1 на любую другую

аминокислоту (аналоги AREKA, SREKA, SRDKA, SRERA и SREKV) приводит к формированию конформаций, полная энергия которых варьирует в пределах значений 2.7-5.6 ккал/моль. Так, например, аналог AREKA ($E_{\text{отн}}=2.7$ ккал/моль), в котором выполнена замена Cys1 \rightarrow Ala1, может реализовывать в условиях неявно заданного водного окружения 7 конформационных состояний, относительная энергия которых лежит в интервале 0-5 ккал/моль. Конформация с минимальным значением полной энергии характеризуется полусвернутой структурой, которая энергетически более предпочтительна по сравнению с полностью свернутыми (или полностью развернутыми) конформациями на $\sim 3-5$ ккал/моль. Наибольший вклад в стабилизацию структуры вносят невалентные взаимодействия, энергия которых составляет -16.2 ккал/моль. Сопоставление полученных данных с результатами расчетов природного пептида CREKA [9-11] показало, что замена полярной аминокислоты Cys1 на неполярную Ala1 существенно не повлияла на конформационную подвижность пептида. Низкоэнергетические конформационные состояния стабилизированы, как и в природном пептиде, водородными связями между положительно заряженной NH_2 -группой Arg2 и COO^- -группой остатка Glu3. Аналогичная ситуация выявлена для аналога SRDKA ($E_{\text{отн}}=4.5$ ккал/моль), который содержит две замены-в первом (Cys1 \rightarrow Ser1) и третьем положениях (Glu3 \rightarrow Asp3) пептидной цепи. Несмотря на наличие большого числа энергетически выгодных контактов между валентно несвязанными атомами во всех низкоэнергетических конформационных состояниях, вклад от энергии электростатических взаимодействий варьирует в пределах 3.8-8.4 ккал/моль, а относительная энергия глобальной конформации (конформации с минимальным значением полной конформационной энергии) составляет 4.5 ккал/моль. Аналог SRERA ($E_{\text{отн}}=3.7$ ккал/моль) также содержит две замены в последовательности аминокислотных остатков Cys1 \rightarrow Ser1 и Lys4 \rightarrow Arg4. Аналог характеризуется вытянутой структурой основной цепи, в которой боковые цепи Arg2 и Arg4 ориентированы в противоположные стороны. Диаметрально противоположная картина наблюдается в случае, когда происходит моно-и дзамещения аргинина во втором положении пептидной цепи. Как следует из результатов расчета, относительная конформационная энергия таких аналогов (SKERA, SKEKA, SKDKA и SKEKV) варьирует в пределах 7.4-12.3 ккал/моль. Так, например, в аналоге SKERA ($E_{\text{отн}}=7.4$ ккал/моль) замена аминокислотных остатков в двух положениях пептидной цепи Arg2 \rightarrow Lys4 и Lys4 \rightarrow Arg4 приводит к резкому увеличению энергии электростатических взаимодействий на 3.3 ккал/моль во

всех рассчитанных структурах. Относительная энергия аналогов варьирует в интервале значений 0-5 ккал/моль. Резкое увеличение электростатических наталкиваний между объемными боковыми цепями Lys2, Glu3 и Lys4 наблюдается и в случае замены Arg2 на Lys2 в аналоге СКЕКА ($E_{\text{отн}}=9.6$ ккал/моль). Аналог СКДКА ($E_{\text{отн}}=8.5$ ккал/моль) с заменами Arg2 \rightarrow Lys2 и Glu3 \rightarrow Asp3 формирует структуры, которые энергетически менее предпочтительны по сравнению с природным соединением как с точки зрения невалентных, электростатических так и торсионных взаимодействий. Наконец, аналог СКЕКВ с Arg2 \rightarrow Lys2 и Ala5 \rightarrow Val5 обладает наибольшей относительной энергией по сравнению с природным пептидом и другими аналогами ($E_{\text{отн}}=12.3$ ккал/моль). Причиной является большое число электростатических наталкиваний атомов в боковых цепях Lys2 и Lys4. Аналог не содержит устойчивых элементов в своей структуре.

ЛИТЕРАТУРА

1. Буркерт У., Аллинжер Н. Молекулярная механика. - Москва: Мир, - 1986. - 364 с.
2. Кобзев Г.И. Применение неэмпирических и полуэмпирических методов в квантово-химических расчетах, - 2004, - 150 с.
3. Сигал Дж. Полуэмпирические методы расчета электронной структуры, - Москва: Мир, - 1980, - т.1, - 327 с., - т.2. - 371с.
4. Popov E.M. Quantitative approach to conformations of proteins // Int.J.Quantum Chem., - 1979, - v.16, - p.707-737
5. Попов Е.М. Структурная организация белков // - Москва: Наука, - 1989, - 352 с.
6. Simberg D., Duza T., Park J.H., Essler M., Pilch J., Zhang L., Derfus A.M., Yang M., Hoffman R.M., Bhatia S., Sailor M.J., Biomimetic amplification of nanoparticle homing to tumors // PNAS, January 16, 2007, - v. 104, - No.3, - p. 932-936
7. Flores-Ortega Z.A., Jimnez A.I., Calaza M.I., Cativiela C., Nussinov R., Ruoslahti E., Alezn C. In Silico Molecular Engineering for a Targeted Replacement in a Tumor-Homing Peptide // J. Phys. Chem. B, - No. 11, - 2009
8. Steiert S.M., Talmadge J., Derfus A., Barry S. Targeted nanoparticles for detecting and treating cancer // Drug Development Res., - 2006, - v. 7, - p.70-93
9. Алиева И.Н., Аббасова Г.Д., Годжаев Н.М. Конформационная динамика боковых цепей молекулы СРЕКА // Bakı Universitetinin Xəbərləri (fizika-riyaziyyat elmləri seriyası), - 2007, - №4, - s.166-174
10. Годжаев Н.М., Аббасова Г.Д., Алиева И.Н. Исследование пространственного строения нового противоопухолевого лекарственного препарата-молекулы СРЕКА // J. Qafqaz University, 2008, No.21, p.30-37
11. Алиева И.Н., Аббасова Г.Д., Годжаев Н.М. Конформационно-динамические свойства молекулы СРЕКА // Application and Communication Technologies (AICT), International Conference, 2009, p.148-152 (<http://ieeexplore.ieee.org>)

PENTAPEPTİD MOLEKULUN ANALOQLARININ KONFORMASIYA İMKANLARININ TƏDQIQI

G.C.ABBASOVA, E.Z.ƏLİYEV

XÜLASƏ

Molekulyar mexanika atom-atom potensial funksiyalar yaxınlaşma üsulu ilə CREKA peptidinin ilkin quruluşunda amin turşu qalıqlarının əvəz olunmasının onun strukturuna təsiri və onun analoqlarının konformasiya xüsusiyyətləri öyrənilmişdir.

Açar sözlər: CREKA peptidi, analoq, konformasiya analizi, struktur, konformasiyanın mütəhərrikliyi

SPATIAL STRUCTURE CONFORMATIONAL PROPERTIES OF ANALOGS OF PENTAPEPTIDE MOLECULE

G.C.ABBASOVA, E.Z.ALIYEV

SUMMARY

The effect of the amino acid mutation on the spatial structure and conformational properties of the CREKA peptide analogs was investigated by using of the atom-atomic potential functions by the method of molecular mechanics.

Keywords: peptide CREKA, analogs, conformational analysis, structure, conformational flexibility

ORCID: 42.65.Ky; 42.70.Mp; 42.79.Nv

NONLINEAR INTERACTION OF WAVES AT STIMULATED MANDELSTAIN-BRILLUEN SCATTERING

N.V.KERIMLI

Azerbaijan Medical University
nazaket_kerimli@mail.ru

In presented work it has been analyzed complex amplitude and intensity of scattered Stokes component by method which considers changing of phases of interacted waves during stimulated Brillouin scattering. It has been known as a method of constant intensity approximation. Generally (by taking into account the damping of all interacted waves) it has been found expression for complex amplitude of Stokes component in an exit of nonlinear medium.

It has been received threshold conditions of strong pumping wave for long length of interaction within dissipative medium at phase miss-match condition as well as for small values of pumping wave at phase-miss-matched condition. It has been shown that the taking into account the damping of wave leads to increasing of threshold and decreasing of amplification.

Keywords: Stimulated Brillouin scattering ,(SBS), constant field approximation (CFA), constant intensity approximation (CIA).

Introduction

Brillouin imaging has emerged as a promising tool for the evaluation of biological materials in terms of their viscoelastic behavior since the function of mechanical properties of cells and tissues is becoming increasingly important in the research of a wide variety of biological processes. Traditional methods for characterizing biomaterials, such as atomic force microscopy (AFM), deformation microscopy, micro-rheology, and magnetic bead twisting, either demand touch, are damaging, or don't offer enough resolution. The clinical instrument known as conventional optical coherence elastography, which evaluates the biomechanics of tissue, is extremely sensitive to ambient vibrations [1]. Brillouin imaging, on the other hand, offers a contactless, label-free, non-destructive method for probing biological samples at the GHz/micron scale and has enormous promise for use in clinical diagnosis.

In 1922 and 1926, separately, Léon Brillouin and Leonid I. Mandelstam [2] [3] [4] made the Brillouin light scattering (BS) effect predictions. The notion that L. I. Mandelstam had previously described this effect in 1918 has raised some dispute, albeit [7]. The Brillouin effect was originally seen and confirmed empirically by L. I. Mandelstam, who worked with Eugenii Gross to identify the BS experimentally [5]. In 1922 and 1926, separately, Léon Brillouin and Leonid I. Mandelstam [3] made the Brillouin light scattering (BS) effect predictions. The notion that L. I. Mandelstam had previously described this effect in 1918 has raised some dispute, albeit [5]. The Brillouin effect was originally seen and confirmed empirically by L. I. Mandelstam, who worked with Eugenii Gross to identify the BS experimentally [6].

The development of the laser in the 1960s provided a light source potent enough to shorten acquisition times and improve resolution, leading to hundreds of experimental studies in the field of condensed matter and eventually developing into a specialized tool [6][7]. Early in the 1980s, the first reports of BS measurements on biological tissues were published, showcasing the system's potential as a highly sensitive and precise research tool [8][9]. Brillouin imaging was introduced in 2005, and virtually imaged phased array (VIPA) spectrometers were created in 1996. Since then, the subject has grown to be a thriving and quickly developing research area [10].[11][12]. In the past ten years, a wide range of BS applications in biology and biomedicine have been documented. A variety of biological materials have been examined using BS as a screening, diagnostic, and monitoring resource at the cellular and tissue levels [13,14].

Theoretically examining of nonlinear scattering has been done by us based on method of constant intensity approximation [15-19] which considers the phase exhaustion and changing of phases of interacted waves.

Theory

Light scattering is caused by the electromagnetic field's interactions with the components of the physical medium. This explains why a laser beam can be observed in directions other than the direction of propagation. Depending on the density of the physical medium and the particle size, the scattered light might have a greater or lesser intensity. Rayleigh, Raman, and Brillouin are some of the components that make up the dispersed light, while Rayleigh and Raman and Brillouin are caused by significant frequency variations.

Another significant distinction between Raman and Brillouin scattering, in addition to the energy shift in the scattered light, is the physical cause of the phenomenon. Raman scattering relies on intramolecular vibrations, and Brillouin scattering relies on low energy collective vibrations, to put it simply. A laser beam can be observed in directions other than the direction

of transmission due to this phenomenon. Depending on the density of the physical medium and other factors, the scattered light may be more or less bright. It is exceedingly difficult to evaluate since the Brillouin-scattered light has a magnitude that is around 10^3 times less than the Raman component and a frequency that changes only by a factor of 10^{-6} – 10^{-5} with respect to the input laser light. The electromagnetic field's interactions with the components of the physical medium cause light to scatter. that size of particle. Rayleigh, Raman, and Brillouin are some of the components that make up the dispersed light, while other components are the result of more subtle or intense frequency changes.

During stimulated Mandelstam Brillouin scattering parametrical interaction of two waves (laser pump wave and scattered waves) and acoustical wave (hypersound) wave occurring in excitation of given medium[4]. In this process the laser wave and scattered waves have the same polarization. Nonlinearity of the process belongs to the third order. To thank to dispersion relation the phase shift of Stokes component depends on the angle between incident and scattered waves which is not obtained in Raman scattering. Along the wave vector of pumping wave the nonelastic scattering is not obtained but in opposite direction (at 180°) it is obtained maksimal Mandelstam Brillouin frequency shift, which is crucial in their applications. Counter wave interaction takes place for given interaction. It means that the interference of pumping wave with counter wave of Stokes component of scattering may lead to essential nonlinear interaction of waves, to thank to complete effective covering of counter waves which is comparable to the bundle of wave along the same direction. Efficiency of given nonlinear interaction depends on phase relation between interacted waves. It is known that during inverse geometry of scattering process the Stokes component takes part of energy from pumping wave of region of nonlinear interaction which leads to increasing of thershold of process of interaction.

It is suggested that before propagation of laser wave at ω_p (pumping wave) along the medium, the medium is excited by acoustical wave at ω_a . It can be hypersound which has heat nature. Laser wave propagating through the medium are diffracted in this medium as a result the counter Stokes component of Mandelstam Brillouin scattering at frequency of $\omega_s = \omega_p - \omega_a$.

Examination of the nonlinear Mandelstam Brillouin scattering process has been done based on shortened equations which describe behavior nonlinear waves. It has been suggested as a quasistationary approximation. Direction of waves is taken along the positive direction of z axis. In order to analytically describe the nonlennear process shortened equations are give by

[20]:

$$\begin{aligned} \frac{dA_p}{dz} + \delta_p A_p &= i\gamma_p A_s A_{ak} e^{-i\Delta z}, \\ \frac{dA_s}{dz} + \delta_s A_s &= -i\gamma_s A_p A_{ak}^* e^{i\Delta z}, \\ \frac{dA_{ak}}{dz} + \delta_{as} A_{ac} &= i\gamma_{ac} A_p A_s^* e^{i\Delta z} \end{aligned} \quad (1)$$

Where $\gamma_{p,s,ac}$ - coefficients of nonlinear interaction of pump wave, Stokes and anti-Stokes components at Stimulated Mandelstam-Brillouin scattering $A_{p,s,ac}$ – are complex amplitude of pumping wave, Stokes and acoustical waves at frequencies $\omega_{p,s,ac}$ respectively,

$$\gamma_p = \frac{\omega_p^2}{2k_p c^2} \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho} \right)_{\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2}^{\wedge^+ \wedge}, \quad \gamma_s = \frac{\omega_s^2}{2k_s c^2} \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho} \right)_{\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2}^{\wedge^+ \wedge}, \quad \gamma_{ak} = \frac{k}{4\pi v^2} \rho_0 \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho} \right)_{\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2}^{\wedge^+ \wedge}$$

$\Delta = k_p + k_s - k_{ak}$ indicates the phase miss-match of wave vectors of pumping wave k_p , Stokes k_s and acoustic k_{ak} waves, cubic is determined

$$\text{by expression of. } \chi_B^{(3)} = \frac{k_{ak} \rho_0}{(\Delta - i\delta_{ak})} \left[\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho} \right)_{\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2}^{\wedge^+ \wedge} / 4\pi v \right]^2 \delta_{p,s} \text{ and } \delta_{ak} = \Gamma_B / v$$

are corresponding the linear wave loss, Γ_B - halfwidth of Mandelstam - Brillouin line at random scattering, v -is speed of acoustic wave, created during electrostriction within dielectric, $\rho_0 \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho} \right)$ - coefficient of electrostriction, ρ_0 - density of nonlinear medium. Generally cubic susceptibility comprises resonance and non-resonance components. Resonance part of $\chi_B^{(3)}$ which is absolutely imaginary and positive is responsible for IRMB at phase mismatch.

Next boundary conditions is used for solving of problem:

$$A_p(z=0) = A_{p0}, \quad A_s(z=l) = A_{sl}, \quad A_{ak}(z=0) = A_{ak0} \quad (2)$$

SBS has threshold. We are interested in finding of amplitude of pumping wave and threshold of backward scattering based on constant intensity approximation [21].

Generally (with taking into account damping of all interacted waves) for complex amplitude of Stokes component at the left entrance of nonlinear medium by using of (1) we get

$$A_z(z) = e^{-i\Delta z} \left[\frac{\frac{\Delta \sin \lambda z}{2} (\gamma_3 A_{po} A_{aco}^* \frac{\sin \lambda l}{\lambda} - \sin i \Delta \frac{l}{2}) + A_{sl} \cos \lambda z \cos i \Delta \frac{l}{2} - \frac{\Delta \sin \lambda z}{2} \cos i \Delta \frac{l}{2}}{\cos \lambda - \frac{i \Delta \sin \lambda l}{z \lambda}} \right] - i \gamma_s A_p A_{aco}^* \frac{\sin \lambda z}{\lambda}, \quad (3)$$

where $\lambda = \sqrt{\Gamma_p^2 - \Gamma_{ak}^2 - \frac{(\delta_p + \delta_{ak} - i\Delta)^2}{4}}$, $I_j = A_j \cdot A_j^*$, $\Gamma_p^2 = \gamma_s \gamma_{ak} I_{po}$, $\Gamma_{ak}^2 = \gamma_s \gamma_p I_{ako}$

When $\delta_p = 0, \gamma_p = 0$

$$A_s^{output}(z) = A_s(z=0) = \frac{i \gamma_s A_{po} A_{aco}^* \sin \lambda^* l / \lambda^* + A_{sl} e^{-\frac{i \Delta l}{2}}}{\cos \lambda^* l - i \Delta \sin \lambda^* / \lambda^*} \quad (4)$$

Based on analytically found expressions (3) and (4) one can easily make conclusion that the efficiency of scattering process depends on total length of nonlinear medium. In absence of wave loss in the medium the wave will propagate with constant velocity and even amplification of backward wave is also can be obtained. Wave loss can be eliminated to thank to counterwave propagation in the metamaterials. Examined condition is crucial for mediums when acoustical wave loss doesn't exceed the wave loss and Stokes component.

Conclusion

Ultimately analytically found expression for complex amplitudes of scattered Stokes components at different parameters of nonlinear Mandelstam Brillouin scattering. It has been shown that the optimal value of pump wave depend on required parameters of the process (wave loss of acoustical wave and pump wave, entrance intensity of Stokes wave and acoustical wave) for any value of z coordinate. It has been found the process of nonlinear scattering can be regulated depend on intensity of pump wave and wave loss. Efficiency of the nonlinear scattering is adjusted depend on intensity of interacted waves and wave losses. Moreover the total length of nonlinear medium has strong impact on efficiency of process Stokes wave scattering

REFERENCES

1. Li, Y.; Moon, S.; Chen, J.J.; Zhu, Z.; Chen, Z. Ultrahigh-sensitive optical coherence elastography. *Light Sci. Appl.* 2020, - 9, - 58.
2. Carlotti, G. Elastic Characterization of Transparent and Opaque Films, Multilayers and Acoustic Resonators by Surface Brillouin Scattering: A Review. *Appl. Sci.* - 2018, - 8, - 124.
3. Mandelstam, L.I. Light scattering by inhomogeneous media. *Zh. Russ. Fiz-Khim. Ova.* 1926, 58, 381.

4. Pechenkin, A. Leonid Isaakovich Mandelstam; Springer: Cham, Switzerland, 2014; ISBN 9783319005713.
5. Gross, E. über Änderung der Wellenlänge bei Lichtzerstreuung in Kristallen. *Z. Fur Phys.* 1930, 63, 685.
6. Rank, D.H. Brillouin Effect in Liquids in the Prelaser Era. *J. Acoust. Soc. Am.* 1971, 49, 937–940.
7. Harley, R.; James, D.F.V.; Miller, A.J.; White, J.W. Phonons and the elastic moduli of collagen and muscle. *Nature* 1977, 267, 285–287.
8. Vaughan, J.M.; Randall, J.T. Brillouin scattering, density and elastic properties of the lens and cornea of the eye. *Nature* 1980, 284, 489–491.
9. Shirasaki, M. Large angular dispersion by a virtually imaged phased array and its application to a wavelength demultiplexer. *Opt. Lett.* 1996, 21, 366–368.
10. Koski, K.J.; Yarger, J.L. Brillouin imaging. *Appl. Phys. Lett.* 2005, 87, 061903.
11. Coker, Z.; Troyanova-Wood, M.; Traverso, A.J.; Yakupov, T.; Utegulov, Z.N.; Yakovlev, V.V. Assessing performance of modern Brillouin spectrometers. *Opt. Express* 2018, - 26, - 2400–2409.
12. Antonacci, G.; Beck, T.; Bilenca, A.; Czarske, J.; Elsayad, K.; Guck, J.; Kim, K.; Krug, B.; Palombo, F.; Prevedel, R.; et al. Recent progress and current opinions in Brillouin microscopy for life science applications. *Biophys. Rev.* 2020, - 12, - 615–624.
13. Kragh, H. The Lorenz-Lorentz formula: Origin and early history. *Substantia* 2018, - 2, - 7–18
14. Carpenter, D.K. *Dynamic Light Scattering with Applications to Chemistry, Biology, and Physics* (Berne, Bruce J.; Pecora, Robert). *J. Chem. Educ.* 1977, 54, A430.
15. Tagiyev Z.H., Kasumova R.J., Salmanova R.A., Kerimli N.V. *J. Opt. B:Quantum Sem.Opt.*, - 3(2001) 84-87
16. Kasumova R.J., Safarova G.A., Shamilova Sh.A., Kerimli N.V. Phase effects in meta-materials at third harmonic generation. *International Journal of Engineering and Technology IJET-IJENS.*, December 2015. - p19-30.
17. Kasumova R.J., Kerimli N.V., Safarova Q.A. Phase effects on coherent anti-Stokes scattering *Journal of applied spectroscopy.* -V. 88, - N1. Amsterdam, Netherlands January-February 2021.]
18. Kerimli N.V. Generation efficiency of nonlinear LiGaSe₂ chalcogenic crystal in the middle infrared region of nondissapative medium. *Problems of Energetics* N1., p.47-52. Baku , Azerbaijan March, - 2023
19. Kerimli N.V. Constant Intensity Approximation in generation of Anti-Stokes component at CARS. *Conference proceedings ICTPE-2023.* - p.152-157.
20. Шен И.Р. Принципы нелинейной оптики. - Москва: Наука, - 1989, - 558 с. (Y.R. Shen, *The principles of nonlinear optics.* – New-York: A Wiley Intersciences Publication, - 1984, -558 p).
21. Kasumova R.J., Kerimli N.V., Safarova Q.A. Phase effects at Stimulated Mandelstam-Brillouin scattering. *Journal of optics and spectroscopy,* - 2023, - 131, - N1, - p.43-48.

МƏCBURİ MANDELŞТАM BRİLLUEN SƏPİLMƏSİNDƏ DALĞALARIN QEYRİ-XƏTTİ QARŞILIQLI TƏSİRİ

N.V.KƏRİMLİ

XÜLASƏ

Təqdim olunan işdə məcburi Brillouin səpilməsində dalğaların qeyri-xətti qarşılıqlı təsiri təkcə onların kompleks amplitudlarını deyil, həm də faza dəyişmələrini nəzərə alan metodla sabit intensivlik yaxınlaşması ilə araşdırılmışdır. Prosesin təhlili qeyri-stasionar rejim üçün aparılmış və dalğaların arasında olan münasibətləri nəzərə alınan zaman bütün dalğalar üçün müəhdə yaranan itkilər də nəzərə alınmışdır. Qeyri-xətti səpilmə prosesi üçün mühitin çıxışında səpilən Stoks dalğasının kompleks amplitudu üçün sabit intensivlik yaxınlaşması ilə müəyyən olunan sərhəd şərtləri daxilində analitik ifadə alınmışdır.

İşdə həmçinin dalğalar arasında optimal faza münasibətləri olduqda güclü doldurma dalğasının və faza uyğunsuzluğu zamanı zəif doldurma dalğasının qeyri-xətti qarşılıqlı təsir məsafəsindən asılı olan sərhəd qiymətləri müəyyən olunmuşdur. Göstərilmişdir ki, itki parametrisinin nəzərə alınması sərhəd qiymətinin artmasına dalğaların qeyri-xətti güclənməsi effektivliyinin aşağı düşməsinə səbəb olur.

Açar sözlər: Stimullaşdırılmış Brillouin səpilməsi, (SBS), sabit sahə yaxınlaşması (CFA), sabit intensivliyin yaxınlaşması (CIA)

НЕЛИНЕЙНОЕ ВЗАИДЕЙСТВИЕ ВОЛН ПРИ ВЫНУЖДЕННЫМ РАССЕЙАНИЕ МАНДЕЛЬШТАМА БРИЛЛЮЭНА

Н.В.КЕРИМЛИ

РЕЗЮМЕ

В представленной работе исследовалось нелинейное взаимодействие волн при вынужденном рассеянии Мандельштама-Бриллюэна методом приближения постоянной интенсивности, учитывающее изменение не только комплексных амплитуд взаимодействующих волн но и фазовые изменения. Анализ процесса проводился для нестационарного режима, а также учитывались потери в среде для всех связанных волн. В работе комплексная амплитуда Стоксовый волны, анализируется в рамках граничных условий для процесса нелинейного рассеяния, определяемых полученной формулой аппроксимации постоянной интенсивности.

Помимо полученного аналитического выражения для Стоксовый волны а также определены граничные значения сильной волны накачки и слабой волны накачки в случае рассогласования фаз в зависимости от расстояния нелинейного взаимодействия. Показано, что учет параметра потерь приводит к снижению эффективности нелинейного усиления волн и увеличения граничного значения волн накачки.

Ключевые слова: вынужденное рассеяние Бриллюэна (BPM), приближение постоянного поля (CFA), приближение постоянной интенсивности (CIA)

MÜNDƏRİCAT

RİYAZİYYAT

İbrahimov N.S., Yaqub Q.Y., Fərzəliyeva Ü.M. Xüsusi qradiyent hədlı xətti qeyri-stasionar kvazioptika tənliyi üçün Lions funksionallı optimal idarəetmə məsələsində zəruri şərt	5
Qasımov Q.R., Cəfərova R.R. Maple riyazi paketi mühitində qeyri-stasionar təsadüfi funksiyanın kanonik ayrılışının araşdırılması	24
Sadıqov M.A. Çoxqıymətli inikasin inteqralı haqqında.....	33
Əkbərov A.Ə. Koşi – Stilyes sinqulyar inteqralı sinifləri	42
Məsməliyev H.M. Yarımsonsuz zəncirlərin Hilbert-Şmidt operatorlar sinfində inteqrallanması.....	46
Amanov R.A., İsmayılov A.İ., Məmməd həsənov E.H. $n + 2 > (2b - k)p$ və $p > 1$ olduqda $W_p^{2b,1}(Q_T) \cap W_\infty^{k,1}(Q_T)$ fəzasında kvazixətti parabolik məsələ	51
Kərimova A.V. Bir xətti optimal idarəetmə məsələsində optimallıq şərtləri haqqında	65

FİZİKA

Davudov B.B., Hüseynov T.X. Baryer boşalmalarında baş verən elementar proseslər.....	76
Həsənova L.H., Məhəmmədov Ə.Z. $Cu_3In_5S_9$ monokristalında optik udma və fotokeçiriciliyin xüsusiyyətləri	81
Məmmədov R.Q., Aslanova Ə.R. Əlavə elektrik sahəli Şottki diodlarının ikiölçülü energetik quruluşu	87
Abbasova G.C., Əliyev E.Z. Pentapeptid molekulinin analoqlarının konformasiya imkanlarının tədqiqi.....	97
Kərimli N.V. Məcburi Mandelştam-Brilluen səpilməsində dalğaların qeyri-xətti qarşılıqlı təsiri	103

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Ибрагимов Н.С., Ягуб Г.Я., Фарзалиева У.М.
 Необходимое условие в задаче оптимального управления с функционалом Лионса для линейного нестационарного уравнения квазиоптики со специальным градиентным слагаемым 5

Гасымов Г.Р., Джафарова Р.Р.
 Исследование канонического разложения нестационарной случайной функции в среде математического пакета Maple 24

Садыгов М.А.
 Об интегрируемости многозначных отображений 33

Акперов А.А.
 Классы сингулярных интегралов Коши – Стилтъяса 42

Масмалиев Г.М.
 Интегрирование полубесконечных цепочек в классе операторов Гильберта-Шмидта 46

Аманов Р.А., Исмаилов А.И., Мамедгасанов Э.Г.
 Квазилинейная параболическая задача в пространстве $W_p^{2b,1}(Q_T) \cap W_\infty^{k,1}(Q_T)$ с $n + 2b > (2b - k)p$ и $p > 1$ 51

Керимова А.В.
 Об условиях оптимальности одной линейной задаче оптимального управления 65

ФИЗИКА

Давудов Б.Б., Гусейнов Т.Х.
 Элементарные процессы происходящие в барьерном разряде 76

Гасанова Л.Г., Магомедов А.З.
 Особенности оптического поглощения и фотопроводимости в монокристалле $Cu_3In_5S_9$ 81

Мамедов Р.К., Асланова А.Р.
 Двухмерная энергетическая структура диодов Шоттки с дополнительным электрическим полем 87

Аббасова Г.Д., Алиев Э.З.
 Исследование конформационных возможностей аналогов пентапептидной молекулы 97

Керимли Н.В.
 Нелинейное взаимодействие волн при вынужденным рассеяние Мандельштама-Бриллюэна 103

CONTENTS

MATHEMATICS

Ibragimov N.S., Yagub G.Y., Farzalieva U.M. Necessary condition in solution to the optimal control problem with Lions type functional for the linear nonstationary quasi-optics equation with a special gradient term.....	5
Gasimov G.R., Jafarova R.R. Study of the canonical expansion of a nonstationary random function in the environment of the Maple mathematical package.....	24
Sadygov M.A. On the integrability of multi-valued mappings.....	33
Akbarov A.A. The class of Cauch-Stiltiyes singular integrals	42
Masmaliyev H.M. Integration of semi-infinite chains in the class of Hilbert-Schmidt operators.....	46
Amanov R.A., Ismayilov A.I., Mamedhasanov E.H. A quasiparabolic problem in the space $W_p^{2b,1}(Q_T) \cap W_\infty^{k,1}(Q_T)$ for $n+2 > (2b-k)p$ and $p > 1$	51
Kerimova A.V. On the optimality of one linear optimal control problem	65

PHYSICS

Davudov B.B., Guseinov T.Kh. Elementary processes occurring in barrier discharge	76
Hasanova L.G., Mahammadov A.Z. Features of optical absorption and photoconductivity in $\text{Cu}_3\text{In}_5\text{S}_9$ single crystal	81
Mamedov R.K., Aslanova A.R. Two-dimensional energy structure of Schottky diodes with an additional electric field	87
Abbasova G.C., Aliyev E.Z. Spatial structure conformational properties of analogs of pentapeptide molecule	97
Kerimli N.V. Nonlinear interaction of waves at stimulated Mandelstain-Brilluen scattering	103

MÜƏLLİFLƏRİN NƏZƏRİNƏ!

Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında Ali Attestasiya Komissiyasının sədrinin 07.05.2021-ci il tarixli 48-01-947/16 sayılı məktubunu əsas tutaraq «Bakı Universitetinin Xəbərləri» jurnalının redaksiya heyəti bildirir ki, nəşr etdirmək üçün təqdim edilən məqalələr aşağıdakı qaydalar əsasında tərtib edilməlidir:

1. Təqdim olunan məqalənin mətni – A4 formatında, sətirlərarası – 1 intervalla, yuxarıdan – 5 sm, aşağıdan – 3,75 sm, soldan – 4 sm, sağdan – 3,5 sm, Times New Roman – 12 (Azərbaycan dilində – latin əlifbası, rus dilində – kiril əlifbası, ingilis dilində – ingilis əlifbası ilə) şrifti ilə yığılmalıdır.

2. Hər bir məqalənin müəllifinin (müəlliflərinin) adı və soyadı tam şəkildə yazılmalı, elektron poçt ünvanı, çalışdığı müəssisənin (təşkilatın) adı göstərilməlidir.

3. Hər bir məqalədə UOT indekslər və ya PACS tipli kodlar və açar sözlər verilməlidir (açar sözlər məqalənin və xülasələrin yazıldığı dildə olmalıdır).

Məqalələr və xülasələr (üç dildə) kompüterdə çap olunmuş şəkildə diskə birlikdə təqdim olunur, disklər geri qaytarılmır!

Əlyazmalar kvartalın əvvəlindən bir ay keçməmiş verilməlidir.

4. Hər bir məqalənin sonunda verilmiş ədəbiyyat siyahısı Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında Ali Attestasiya Komissiyasının «Dissertasiyaların tərtibi qaydaları» barədə qüvvədə olan Təlimatının «İstifadə edilmiş ədəbiyyat» bölməsinin əlavə 4.1 tələbləri əsas götürülməlidir.

Kitabların (monoqrafiyaların, dərsliklərin və s.) bibliografik təsviri kitabın adı ilə tərtib edilir. Məs.: Qeybullayev Q.Ə. Azərbaycan türklərinin təşəkkülü tarixindən. - Bakı: Azərənşr, - 1994. - 284 s.

Müəllifi göstərilməyən və ya dördədən çox müəllifi olan kitablar (kollektiv monoqrafiyalar və ya dərsliklər) kitabın adı ilə verilir. Məs.: Kriminalistika: Ali məktəblər üçün dərslik / K.Q.Sarıcalınskayanın redaktəsi ilə. - Bakı: Hüquq ədəbiyyatı, - 1999. - 715 s.

Çoxcildli nəşrə aşağıdakı kimi istinad edilir. Məs.: Azərbaycan tarixi: [7 cildə], - Bakı: Elm, - 2000. IV c., - 456 s.

Məqalələrin təsviri aşağıdakı şəkildə olmalıdır. Məs.: Vəlixanlı N.M. X əsrin ikinci yarısı – XI əsrdə Azərbaycan feodal dövlətlərinin qarşılıqlı münasibətləri və bir daha «Naxçıvanşahlıq» haqqında // - Bakı: AMEA-nın Xəbərləri. Tarix, fəlsəfə, hüquq seriyası, - 2001. № 3. - s. 120-129.

Məqalələr toplusundakı və konfrans materiallarındakı mənbələr belə göstərilir. Məs.: Məmmədova G.H. Azərbaycan memarlığının inkişafında Heydər Əliyevin rolu / Azərbaycan Respublikasının Prezidenti H.Ə.Əliyevin 80 illik yubileyinə həsr olunmuş elmi-praktik konfransının materialları. - Bakı: Nurlan, - 2003. - s.3-10.

Dissertasiyaya istinad belə olmalıdır. Məs.: Süleymanov S.Y. Xlorofill-zülal kompleksləri, xloroplastların tilakoid membranında onların struktur-molekulyar təşkili və formalaşmasının tənzimlənməsi: Biol. elm. dok. dis. - Bakı, 2003. - 222 s.

Dissertasiyanın avtoreferatına da eyni qaydalarla istinad edilir, yalnız «avtoreferat» sözü əlavə olunur.

Qəzet materiallarına istinad belə olmalıdır. Məs.: Məmmədov M.A. Faciə janrının tədqiqi // «Ədəbiyyat və incəsənət» qəz., - Bakı, 1966, 14 may.

Arxiv materiallarına aşağıdakı kimi istinad edilir. Məs.: Azərbaycan Respublikası MDTA: f.44, siyahı №2, iş №26, vərəq.3-5.

İstifadə edilmiş ədəbiyyat siyahısında son 5-10 ilin ədəbiyyatına üstünlük verilməlidir.

PS: Rəhbərliyin bizə verdiyi göstərişə əsasən növbəti saylarda bu tələblərin hər hansı birinə cavab verməyən məqalələr nəşriyyat tərəfindən qəbul edilməyəcək.

Redaktoru: *Məryəm Qədimova*

Korrektoru: *Solmaz Babaşova*

Kompüter tərtibçisi: *Azadə İmanova*

Çapa imzalanmışdır: 31.01.2023

Formatı: 70x100 1/16. Həcmi 7,25 ç.v. Sayı 120.

Bakı Dövlət Universitetinin Nəşr Evində çap olunmuşdur.

AZ 1148, Bakı ş., ak. Z.Xəlilov küçəsi, 33.

Tel: (+99412) 538 87 39 / 538 50 16

e-mail: bdumetbee@gmail.com

www.bsu.edu.az